This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

QA
312
N5
MATH

516.4
N669+

LELAND·STANFORD·JVNIOR·VNIVERSITY

THEORIE
DES INTEGRALLOGARITHMUS
UND VERWANDTER TRANSZENDENTEN

VON

Dr. NIELS NIELSEN

DOZENT DER REINEN MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT KOPENHAGEN

Mathematics Library

LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1906

289441

STANFORD LIBRARY

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Schon im Jahre 1809 hat Soldner auf eine merkwürdige Analogie, hinsichtlich einiger Kettenbruchentwicklungen, zwischen dem Integrallogarithmus $\mathrm{li}(e^{-x})$ und der sogenannnten Krampschen Transzendente $L(x)$ aufmerksam gemacht.

Fünfzig Jahre später hat Schlömilch in seiner ersten Abhandlung über Fakultätenreihen, offenbar aber ohne die Bemerkung von Soldner zu kennen, die Ursache dieser Analogie entdeckt, indem er die beiden Transzendenten als Spezialfälle einer allgemeinen Funktion von zwei Variabeln herleitete. Die von Schlömilch betrachtete allgemeine Funktion war diejenige durch die Identität $\Gamma(\nu) = P_x(\nu) + Q_x(\nu)$ definierte, später als Prymsche Q-Funktion bezeichnete, Funktion, welche in ν eine ganze Transzendente sein muß, wenn nur $|x| > 0$ angenommen wird.

Die Bemerkungen von Soldner und Schlömilch scheinen recht unbeachtet geblieben zu sein; denn noch so spät wie im Jahre 1879 macht Laguerre auf eine, mit der von Soldner bemerkten sehr ähnliche, Analogie zwischen $\mathrm{li}(e^{-x})$ und $L(x)$, und zwar ohne die beiden früheren Autoren zu erwähnen, aufmerksam.

Wenn man aber mit Schlömilch behauptet, daß die beiden Funktionen $\mathrm{li}(e^{-x})$ und $L(x)$ als Spezialfälle der Prymschen Q-Funktion angesehen werden können, so ist doch zu bemerken, daß man in der oben angegebenen Definition von $Q_x(\nu)$ ν als die eigentliche Variabele, x aber als einen Parameter ansehen muß, während man umgekehrt, falls $\mathrm{li}(e^{-x})$ und $L(x)$ als Spezialfälle von $Q_x(\nu)$ hergeleitet werden sollen, ν als einen Parameter, x als die eigentliche Variabele ansehen muß; es ist nämlich in der Tat $\nu = 0$, bzw. $\nu = \frac{1}{2}$ einzuführen.

Es war eben diese fundamentale Verschiedenheit, die mich veranlaßte, nicht die Theorie der Transzendenten $\mathrm{li}(e^{-x})$ und $L(x)$, oder was dasselbe ist, die Theorie der Prymschen Funktion $Q_x(\nu)$ als Funktion von x, in meinem *Handbuch der Theorie der Gammafunktion* als einen vierten Teil aufzunehmen, weil diese Funktion ja in der Tat der Gammafunktion ganz fremd ist.

Die Vorteile, welche eine solche allgemeine Untersuchung der Funktion $Q_x(\nu)$, als Funktion von x betrachtet, für die Ausbildung

einer systematischen Theorie der beiden berühmten Transzendenten li e^{-x} und Lx und der mit ihnen nahe verwandten Funktionen ci x und si x, sowie der Fresnelschen Integrale Cx und Sx darbietet, liegen auf der Hand. Aus der folgenden Darstellung geht es in der Tat deutlich hervor, daß viele Eigenschaften dieser Funktionen mit einem Schlage aus allgemeineren Eigenschaften der Prymschen Funktion hergeleitet werden können. Von diesem allgemeinen Gesichtspunkte ausgehend, muß man aber die älteren Definitionen mehrerer der vorhergehenden Transzendenten kleinen Umänderungen unterwerfen. Es ist ferner zu bemerken, daß eine solche Änderung auch notwendig ist, um die einheitliche Form vieler Formeln mit diesen Funktionen nicht zu stören.

Welche neuen Resultate nun eine solche systematische Untersuchung hervorgebracht hat, dürfte wohl für den kundigen Leser aus den im Texte vorliegenden Quellenzitaten deutlich hervorgehen.

Was endlich die Tafellegung unserer Funktionen betrifft, so muß ich bemerken, daß ich außer den Zitationen der vorliegenden Berechnungen nicht näher auf dieselben eingehen konnte. Es scheint mir nämlich, daß die zahlreich vorhandenen numerischen Tafeln ganz und gar unbrauchbar sind, weil sie die Funktionenwerte selbst nicht deren Briggische Logarithmen enthalten. In diesen Tafeln ist es sehr umständlich zu interpolieren, während es außer allem Zweifel ist, daß Tafeln, in denen die Logarithmen angegeben sind, genügende Ausführlichkeit vorausgesetzt, beinahe ebenso leicht wie die trigonometrischen Tafeln benutzt werden können.

Das Vorhandensein solcher praktischen Tafeln wäre in der Tat höchst wünschenswert, besonders wegen der reichen Anwendbarkeit unserer Funktionen auf Zahlentheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Physik. Möchte nun die Herausgabe dieser systematischen Theorie diejenigen Mathematiker, die größere Rechnungsfertigkeit und daneben mehr freie Zeit als ich selbst besitzen, zur Ausarbeitung solcher praktischen Tafeln anregen!

Es ist mir eine teure Pflicht, Herrn General V. H. O. Madsen meinen herzlichsten Dank auszusprechen für das freundliche Interesse, daß er auch der Ausarbeitung dieses Werkchens entgegengebracht hat, und endlich muß ich noch vor allem der Teubnerschen Verlagsbuchhandlung für ihr freundliches Entgegenkommen und für die schöne Ausstattung des Buches meinen besten Dank aussprechen.

Kopenhagen, den 24. Juni 1906.

Dr. Niels Nielsen.

Inhalt.

Kapitel I.

Definitionen und analytische Eigenschaften. Seite

§ 1. Der Integrallogarithmus 1
§ 2. Formeln von Mascheroni und Bessel 4
§ 3. Die Funktionen $\mathrm{ci}(x)$ und $\mathrm{si}(x)$. Integrale von Kramp und Fresnel. 6
§ 4. Anwendungen der Fakultätenreihe für $P(x, r)$ 8
§ 5. Differentiation und unbestimmte Integration 11
§ 6. Die Funktion $\mathrm{li}(e^{-x})$ und die logarithmische Reihe 13
§ 7. Die Funktionen $\mathrm{ci}(x)$ und $\mathrm{si}(x)$ als Grenzwerte 15

Kapitel II.

Integraldarstellungen.

§ 8. Integraldarstellungen der sechs Transzendenten 17
§ 9. Herleitung einiger allgemeinerer Integrale 20
§ 10. Integrale von Laplace und Raabe 23
§ 11. Integrale von Schlömilch 25
§ 12. Integralbestimmungen durch $L(x)$, $C(x)$, $S(x)$ und $\varrho(x)$ 27
§ 13. Über das Produkt $Q(\alpha x, \nu) \cdot Q(\beta x, \varrho)$ 30
§ 14. Über einen Integralsatz von Bessel 33

Kapitel III.

Asymptotische Reihen und Kettenbrüche.

§ 15. Asymptotische Reihe für die Q-Funktion 35
§ 16. Anwendungen 38
§ 17. Kettenbrüche von Laplace, Soldner und Legendre 40
§ 18. Die Annäherungsbrüche des Legendreschen Kettenbruchs 43
§ 19. Verallgemeinerungen der Kettenbrüche von Laguerre und Tannery . 45

Kapitel IV.

Bestimmte Integrale.

§ 20. Integrale mit der Exponentialfunktion 47
§ 21. Diskontinuierliche Integrale 49
§ 22. Analogien der Integrale der §§ 9 und 14 51
§ 23. Weitere diskontinuierliche Integrale 53
§ 24. Das Analogon des zweiten Eulerschen Integrals 54

Seite
§ 25. Das Analogon des Laplace-Abelschen Integrals 56
§ 26. Bestimmte Integrale mit Zylinderfunktionen 59
§ 27. Integrale mit der Lommelschen Funktion 62
§ 28. Integralsatz von Sonin 64
§ 29. Weitere Integraldarstellungen der Eulerschen Konstante 67

Kapitel V.

Verschiedene Reihenentwicklungen.

§ 30. Partialbruchentwicklungen 71
§ 31. Besondere Entwicklungen für $\mathrm{si}(x)$ 73
§ 32. Fouriersche Reihen für verschiedene elementare Funktionen 75
§ 33. Fouriersche Reihen für $\log x$, $\log\Gamma(x+1)$ und $\Psi(x+1)$ 77
§ 34. Analogien der Bernoullischen Funktionen 81

Kapitel VI.

Numerische Berechnung der sechs Transzendenten.

§ 35. Über die Addition der Argumente 83
§ 36. Weitere Formeln von Soldner und Bessel 85
§ 37. Tafeln für $\mathrm{li}(x)$, $\mathrm{ci}(x)$ und $\mathrm{si}(x)$ 88
§ 38. Tafeln für $L(x)$, $C(x)$ und $S(x)$ 90
§ 39. Der Integrallogarithmus und die Zahlentheorie 92

Literaturverzeichnis.

A. Theorie und Tafeln 95
B. Zahlentheoretische Anwendungen 100
C. Anwendungen auf Wahrscheinlichkeitsrechnung 101
D. Physikalische Anwendungen 102

Alphabetisches Register 105

Stanford Library

Kapitel I.

Definitionen und analytische Eigenschaften.

§ 1. Der Integrallogarithmus.

Aus der Theorie der Gammafunktion ist es bekannt, daß die Differenz $Q_x(\nu)$ der bestimmten Integrale[1])

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} dt, \quad P_x(\nu) = \int_0^x e^{-t} t^{\nu-1} dt,$$

welche beide für $\Re(\nu) > 0$ einen Sinn haben, eine in ν ganze transzendente Funktion wird, falls x eine endliche, von Null verschiedene, reelle oder komplexe Zahl bedeutet.

Die Integrationswege der obengenannten bestimmten Integrale dürfen den Punkt $t = 0$ nicht umschlingen; in $\Gamma(\nu)$ müssen die sehr entfernten Punkte des Weges niemals negative Abszissen erhalten, während der Integrationsweg in $P_x(\nu)$ ein endlicher sein muß.

In der Theorie der Gammafunktion ist ν die eigentliche Variabele, während x als ein Parameter anzusehen ist. Bei den Untersuchungen, mit welchen wir uns hier zu beschäftigen haben, ist es gerade umgekehrt, indem ν hier als Parameter anzusehen ist, während x die eigentliche Variabele wird. Wir setzen daher immer

$$P_x(\nu) = P(x, \nu), \quad Q_x(\nu) = Q(x, \nu)$$

und erhalten somit

$$(1) \qquad P(x, \nu) = \int_0^x e^{-t} t^{\nu-1} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{\nu+s}}{s!\,(\nu+s)},$$

wo die Reihenentwicklung aus dem Integrale hergeleitet worden ist,

---

1) Man vergleiche mein Handbuch der Theorie der Gammafunktion, p. p. 25, 210; Leipzig 1906 bei B. G. Teubner.

indem statt e^{-t} die gewöhnliche Potenzreihe eingeführt und dann gliedweise integriert wurde, was ja offenbar für ein endliches x erlaubt ist.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir nunmehr den Grenzwert der Differenz

$$Q(x, \nu) = \Gamma(\nu) - P(x, \nu) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\nu-1} dt \tag{2}$$

für ganze, nicht positive Werte des Parameters ν zu bestimmen suchen. Zu diesem Zwecke betrachten wir zuerst den einfachsten Fall $\nu = 0$, auf welchen, wie wir später sehen werden, die übrigen sich zurückführen lassen.

Wir wollen daher diesen spezielleren Grenzwert als independente Funktion einführen; bezeichnen wir diese Funktion als den *Integrallogarithmus mit dem Argumente* e^{-x}, li (e^{-x}), so ist demnach

$$\text{li}\,(e^{-x}) = -Q(x, 0) = \lim_{\nu=0} (P(x, \nu) - \Gamma(\nu)). \tag{3}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich nun ohne Mühe

$$P(x, \nu) - \Gamma(\nu) = \frac{x^\nu - \Gamma(\nu+1)}{\nu} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{\nu+s}}{s!\,(\nu+s)},$$

woraus, durch Anwendung der Definition der Eulerschen Konstante

$$C = -\Gamma^{(1)}(1) = \lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right), \tag{4}$$

nach einer einfachen Rechnung

$$\text{li}\,(e^{-x}) = C + \log x + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^s}{s!\,s} \tag{5}$$

folgt, wo der Logarithmus rechter Hand so zu bestimmen ist, daß für $x = |x| \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$ immer $-\pi \leqq \theta \leqq +\pi$ ist.

Für *negative* x kann li (e^{-x}) demnach nicht *reell* sein; setzen wir aber

$$\text{li}\left(e^{-x \cdot e^{\pm \pi i}}\right) = \text{li}_1\,(e^x) \pm \pi i, \tag{6}$$

woraus

$$\text{li}_1\,(e^x) = C + \log x + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^s}{s!\,s} \tag{7}$$

hervorgeht, so wird diese Funktion eben für ***positive* x *reell*.**

Aus (5) findet sich noch unmittelbar der Grenzwert

$$\lim_{\alpha=0} (\mathrm{li}\,(e^{-\alpha x}) - \log \alpha) = C + \log x, \tag{8}$$

welcher uns späterhin sehr nützlich sein wird.

Setzen wir in (5) $-\log x$ statt x, so folgt die andere Entwicklung

$$\mathrm{li}\,(x) = C + \log(-\log x) + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(\log x)^s}{s!\,s}, \tag{9}$$

so daß diese Funktion für $0 < x < 1$ *reell* wird und sonst nicht; für $x > 1$ ergibt sich aber vermöge (7) die *reelle* Funktion

$$\mathrm{li}_1\,(x) = C + \log(\log x) + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(\log x)^s}{s!\,s}. \tag{10}$$

Was die analytische Natur der Funktion $\mathrm{li}\,(e^{-x})$ betrifft, so leuchtet ein, daß diese Funktion im Ursprung dieselbe Singularität wie $\log x$ besitzt, daß sie sich aber sonst für jeden endlichen Wert von x regulär verhält. Für $x = \infty$ hat unsere Funktion, wie wir später in § 15 zu zeigen haben, im wesentlichen dieselbe Singularität wie e^{-x}.

Bei früheren Autoren findet sich häufig, daß der Logarithmus rechter Hand in (5) durch $\frac{1}{2}\log(x^2)$ oder sogar durch $\frac{1}{4}\log(x^4)$ ersetzt wird. Dies ist aber nicht zulässig, weil, wie unsere späteren Entwicklungen deutlich zeigen, die beiden Funktionen $\mathrm{li}\,(e^x)$ und $\mathrm{li}_1\,(e^x)$ verschiedene Eigenschaften besitzen in bezug auf die asymptotischen Entwicklungen und analytischen Anwendungen.

Der Integrallogarithmus kommt zum ersten Male und zwar unter der Form (9) bei Euler[1]) vor; Euler kannte aber nicht den Wert der Konstante in (9); ja, er behauptete sogar, daß diese Konstante nicht endlich sein könnte, falls $\mathrm{li}\,(x)$ mit x verschwinden solle; dies ist, wie wir später in § 15 zu zeigen haben, nicht stichhaltig.

Mascheroni[2]) hat zuerst nachgewiesen, daß die Konstante in (9) mit der Eulerschen Konstante zusammenfällt. Es scheint mir aber doch nicht angemessen, diese berühmte Zahl als Mascheronische Konstante oder Konstante des Integrallogarithmus zu bezeichnen, denn diese Konstante ergibt sich ja in unserer Darstellung deutlich durch Differentiation der Gammafunktion, d. h. durch die Definition (4).

1) Institutiones calculi integralis Bd. I, p. 125; 1768. 2. Ausg. 1792.

2) Adnotationes ad Euleri calculum integralem. Ticini 1790—1792.

§ 2. Formeln von Mascheroni und Bessel.

Um nun auch den allgemeinen, sich aus § 1, (2) ergebenden Grenzwert für $\nu = -n$, n positiv ganz, zu bestimmen, leiten wir aus der Integraldarstellung § 1, (2) durch partielle Integration die Differenzengleichung

$$Q(x, \nu+1) = \nu \cdot Q(x, \nu) + e^{-x} \cdot x^{\nu} \tag{1}$$

ab und finden somit

$$\frac{Q(x, \nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} = \frac{Q(x, \nu)}{\Gamma(\nu)} + \frac{e^{-x}x^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}, \tag{2}$$

woraus durch vollständige Induktion die noch allgemeinere Formel:

$$\frac{Q(x, \nu+n)}{\Gamma(\nu+n)} = \frac{Q(x,\nu)}{\Gamma(\nu)} + e^{-x} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{x^{\nu+s}}{\Gamma(\nu+s+1)}. \tag{3}$$

Eine einfache Reduktion ergibt dann ohne weiteres, nachdem man $\nu = -n$ gesetzt hat,

$$Q(x,-n) = \frac{(-1)^n}{n!}\left(Q(x, 0) + \frac{e^{-x}}{x^n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^{n-s}(n-s-1)!\, x^s\right), \tag{4}$$

woraus wegen § 1, (3) der gesuchte Grenzwert

$$\lim_{\nu=-n}(P(x, \nu) - \Gamma(\nu)) = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\mathrm{li}\,(e^{-x}) - e^{-x} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^{n-s}(n-s-1)!}{x^{n-s}}\right) \tag{5}$$

folgt, der ja, wie wir behauptet haben, in endlicher Form durch den Integrallogarithmus bestimmt wird.

Der Grenzwert (5) kann auch mittels der Reihenentwicklung § 1, (1) entwickelt werden; es ist nämlich

$$P(x, \nu) - \Gamma(\nu) = \left(\frac{(-1)^n x^{\nu+n}}{n!\,(\nu+n)} - \Gamma(\nu)\right) + \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s x^{s+\nu}}{s!\,(\nu+s)} +$$

$$+ (-1)^{n+1} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{n+1+\nu+s}}{(n+s+1)!\,(\nu+n+1+s)};$$

aus der Identität

$$\Gamma(\nu) = \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+n)}$$

ergibt sich dann ohne Mühe diese andere

$$\frac{(-1)^n x^{\nu+n}}{n!\,(\nu+n)} - \Gamma(\nu) = \frac{(-1)^n x^{\nu+n} \cdot \nu(\nu+1)\cdots(\nu+n-1) - n!\,\Gamma(\nu+n+1)}{n!\,\nu(\nu+1)\cdots(\nu+n-1)(\nu+n)};$$

setzen wir demnach $\nu = -n$, so kann der Grenzwert rechter Hand unter Zuhilfenahme der gewöhnlichen Methode bestimmt werden; wir finden dadurch

$$\lim_{\nu=-n}\left(\frac{(-1)^n x^{\nu+n}}{n!\,(\nu+n)} - \Gamma(\nu)\right) = \frac{(-1)^n}{n!}\,(C - \lambda(n) + \log x),$$

wo der Kürze halber

$$\lambda(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \tag{6}$$

gesetzt worden ist.

Nach diesen Erörterungen erhalten wir nun ohne Mühe

$$-Q(x,-n) = \frac{(-1)^n}{n!}(C - \lambda(n) + \log x) + \\ + (-1)^n \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^s}{s\cdot(n+s)!} - \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s x^{s-n}}{s!\,(n-s)},$$

woraus unter Zuhilfenahme der Formel (5) folgt:

$$\left\{\begin{array}{c} \mathrm{li}(e^{-x}) = C - \lambda(n) + \log x + \\ + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s n! x^s}{s\cdot(n+s)!} - \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^{n-s} n! x^{s-n}}{(n-s)\cdot s!} + e^{-x}\cdot \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^s (s-1)!}{x^s}; \end{array}\right. \tag{7}$$

setzen wir nun in (7) $-\log x$ statt x, so erhalten wir diese andere Entwicklung

$$\left\{\begin{array}{c} \mathrm{li}(x) = C - \lambda(n) + \log(-\log x) + \\ + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{n!\,(\log x)^s}{s(n+s)!} + x\cdot \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(s-1)!}{(\log x)^s} - \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{n!\,(\log x)^{s-n}}{s!\,(n-s)}, \end{array}\right. \tag{8}$$

welche Mascheroni[1]) zu verdanken ist.

Wir wollen noch in diesem Zusammenhang die Funktion $P(x, n)$ für positiv ganze n näher untersuchen. Zu diesem Zwecke gehen wir von der aus § 1, (2) unmittelbar folgenden Identität

$$\frac{Q(x,\nu+n)}{\Gamma(\nu+n)} - \frac{Q(x,\nu)}{\Gamma(\nu)} = \frac{P(x,\nu)}{\Gamma(\nu)} - \frac{P(x,\nu+n)}{\Gamma(\nu+n)}$$

aus und finden somit vermöge (3)

$$\frac{P(x,\nu+n)}{\Gamma(\nu+n)} = \frac{P(x,\nu)}{\Gamma(\nu)} - e^{-x}\cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{x^{\nu+s}}{\Gamma(\nu+s+1)}. \tag{9}$$

---

1) Zitat von Bessel, Abhandlungen Bd. II, p. 331.

Hieraus ergibt sich unter Zuhilfenahme der aus § 1, (1) hergeleiteten Identität

$$P(x,1) = 1 - e^{-x} \tag{10}$$

der gesuchte Wert

$$P(x,n+1) = e^{-x} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{n!\, x^{n+s}}{(n+s)!}. \tag{11}$$

Aus der elementaren Entwicklung

$$\frac{e^{-x}-1}{x} = -\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^s}{(s+1)!}$$

folgt noch unmittelbar wegen § 1, (1)

$$D_x^{n-1}\left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right) = \frac{(-1)^n}{x^n} \cdot P(x,n), \tag{12}$$

welche Formel Bessel[1]) zu verdanken ist.

§ 3. Die Funktionen ci (x) und si (x). Integrale von Kramp und Fresnel.

Wir haben schon in § 1 erwähnt, daß die Funktion li (e^{-x}) sich für sehr große Werte von $|x|$ wie e^{-x} verhält; die Analogien der trigonometrischen Funktionen cos x und sin x sind in dem Integralkosinus ci (x) und dem Integralsinus si (x) zu suchen, indem diese beiden Funktionen durch die Identitäten

$$\text{ci}\,(x) = \frac{\text{li}(e^{ix}) + \text{li}(e^{-ix})}{2} \tag{1}$$

$$\text{si}\,(x) = \frac{\text{li}(e^{ix}) - \text{li}(e^{-ix})}{2i}, \tag{2}$$

in denen stets

$$\pm i = e^{\pm \frac{\pi i}{2}}$$

zu setzen ist, definiert werden.

Aus (1) und (2) folgen demnach ohne weiteres die beiden anderen Identitäten

$$\text{ci}\,(x) \pm i\,\text{si}\,(x) = \text{li}\,(e^{\pm ix}).$$

---

1) Abhandlungen Bd. II, p. 335.

Führen wir nun in (1) und (2) die aus § 1, (5) erhaltenen Entwicklungen ein, so finden wir ohne weiteres

$$\text{ci}\,(x) = C + \log x + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!\,2s} \tag{3}$$

$$\text{si}\,(x) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)!\,(2s+1)}; \tag{4}$$

der Integralsinus ist demnach eine in x ganze transzendente Funktion, während der Integralkosinus, wie li (e^{-x}) selbst, auch den singulären Punkt $x = 0$ besitzt.

Aus (3) ergeben sich unmittelbar die Identitäten

$$\text{ci}\,(x) - \text{ci}(x \cdot e^{\pm \pi i}) = \mp \pi i \tag{5}$$

$$\lim_{\alpha = 0} (\text{ci}\,(\alpha x) - \log \alpha) = C + \log x, \tag{6}$$

während (4) in ähnlicher Weise die Formel

$$\text{si}\,(x) + \text{si}\,(-x) = -\pi \tag{7}$$

liefert.

In diesem Zusammenhang bemerken wir, daß die Q-Funktion auch als Spezialfall eine andere berühmte Funktion enthält, nämlich die sogenannte Krampsche Transzendente $L(x)$, d. h. die Funktion

$$L(x) = \tfrac{1}{2} \cdot Q(x^2, \tfrac{1}{2}); \tag{8}$$

aus § 1, (1) und (2) folgt dann unmittelbar die Reihenentwicklung

$$L(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{s!\,(2s+1)}, \tag{9}$$

so daß $L(x)$ eine in x ganze transzendente Funktion sein muß.

Die entsprechenden Analogien der Funktionen ci(x) und si(x) werden durch die Formeln

$$C(x) = \frac{\varepsilon_1 L(x\varepsilon) + \varepsilon L(x\varepsilon_1)}{2} \tag{10}$$

$$S(x) = \frac{\varepsilon L(x\varepsilon_1) - \varepsilon_1 L(x\varepsilon)}{2i} \tag{11}$$

definiert, wo der Kürze halber

$$\varepsilon = e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad \varepsilon_1 = e^{-\frac{\pi i}{4}}, \quad \varepsilon\varepsilon_1 = 1 \tag{12}$$

gesetzt worden ist. Aus (10) und (11) folgen dann ohne Mühe die beiden Entwicklungen

$$C(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{4s+1}}{(2s)!\,(4s+1)} \tag{13}$$

$$S(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{4s+3}}{(2s+1)!\,(4s+3)}, \tag{14}$$

sodaß $C(x)$ und $S(x)$ auch ganze transzendente Funktionen in x sein müssen.

Die Funktionen $\mathrm{ci}(x)$ und $\mathrm{si}(x)$ sind wohl zuerst von Mascheroni[1]) und Bessel[2]) erwähnt, aber zuerst von Schlömilch[3]), Arndt[4]) und Bretschneider[5]) eingehender untersucht worden. Die Funktion $L(x)$ ist zuerst von Kramp[6]) und Laplace[7]), die Funktionen $C(x)$ und $S(x)$ sind zuerst von Fresnel[8]) untersucht worden.

§ 4. Anwendungen der Fakultätenreihe für $P(x,\nu)$.

Aus der bekannten Fakultätenreihe für die Funktion $P(x,\nu)$[9]) lassen sich interessante Umformungen der Reihenentwicklungen unserer sechs Transzendenten herleiten; wir wollen indessen zuerst die obengenannte Fakultätenreihe von einem neuen Gesichtspunkte aus beweisen.

Zu diesem Zwecke multiplizieren wir die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s a_s}{s!} \cdot x^s \tag{1}$$

mit der Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{s!} \cdot x^s; \tag{2}$$

---

1) Zitat von Lacroix: Traité de calcul diff. et intégr. Bd. III, p. 522; 1819.
2) Abhandlungen Bd. II, p. 341. (1812).
3) Journal für Math. Bd. 33, p. 316—328; 1846.
4) Grunert Archiv Bd. 10, p. 225—250; 1847.
5) Grunert Archiv Bd. 3, p. 27—34; 1843.
6) Analyse des réfractions astronomiques et terrestres. Straßburg 1799.
7) Mécanique céleste Bd. IV, live 10.
8) Mém. de l'Institut de France Bd. 5, p. 338—475; 1826.
9) Handbuch der Gammafunktion, p. 28.

setzen wir der Kürze halber

$$\Delta^n a_0 = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} a_{n-s}, \tag{3}$$

so entfließt unmittelbar die gewünschte Produktformel

$$e^x \cdot f(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \Delta^s a_0 \cdot x^s. \tag{4}$$

Um nun diese allgemeine Formel auf die Funktion $P(x,\nu)$ anwenden zu können, setzen wir wegen § 1, (1)

$$a_n = \frac{1}{\nu+n};$$

eine elementare Formel liefert dann

$$\Delta^n a_0 = \frac{(-1)^n n!}{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+n)},$$

und somit erhalten wir ohne Mühe die gesuchte Entwicklung

$$P(x,\nu) = e^{-x} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{x^{s+\nu}}{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+s)}. \tag{5}$$

Die Formel (5) verdanken wir Legendre[1]); sie ist indessen beinahe gleichzeitig von Bessel[2]) und kurz nachher auch von Eytelwein[3]) gefunden worden.

Eine Anwendung des aus § 1, (3) folgenden Grenzwertes

$$\mathrm{li}\,(e^{-x}) = \lim_{\nu=0} \frac{\nu P(x,\nu) - \Gamma(\nu+1)}{\nu}$$

ergibt dann unmittelbar aus (5) für $\mathrm{li}\,(e^{-x})$ die folgende Entwicklung

$$\mathrm{li}\,(e^{-x}) = C + \log x - e^{-x} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\lambda(s)}{s!} \cdot x^s, \tag{6}$$

wo $\lambda(s)$ die in § 2, (6) eingeführte positive rationale Zahl bezeichnet;

---

1) Exercices de calcul intégral Bd. I, p. 343; 1811. Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes Bd. II, p. 505; 1826.

2) Abhandlungen Bd. II, p. 338 (1812).

3) Grundlehren der höheren Analysis Bd. I, p. 482; Berlin 1824.

die Formel (6) ist zuerst von Bessel[1]), später von Schendel[2]) entwickelt worden.

Wenden wir nun weiter die Formeln § 3, (1), (2) an, so ergeben sich aus (1) die beiden ähnlichen

$$\text{ci}\,(x) = C + \log x + A(x)\cos x - B(x)\sin x \tag{7}$$

$$\text{si}\,(x) = -\frac{\pi}{2} + A(x)\sin x + B(x)\cos x, \tag{8}$$

in denen der Kürze halber

$$A(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}\lambda(2s)}{(2s)!}\cdot x^{2s} \tag{9}$$

$$B(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s}\lambda(2s+1)}{(2s+1)!}\cdot x^{2s+1} \tag{10}$$

gesetzt worden ist; die Formeln (7) und (8) verdanken wir Lommel.[3])

Setzen wir noch in (5) $\nu = \frac{1}{2}$ und x^2 statt x, so folgt vermöge § 1, (2) und § 3, (8) diese andere Entwicklung

$$L(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} - e^{-x^2}\cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{2^s\cdot x^{2s+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2s+1)}, \tag{11}$$

aus der sich unter Anwendung der Definitionen § 3, (10), (11)

$$C(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - \cos(x^2)A_1(x) - \sin(x^2)B_1(x) \tag{12}$$

$$S(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - \sin(x^2)A_1(x) + \cos(x^2)B_1(x) \tag{13}$$

ergeben, in denen der Kürze halber

$$A_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s 2^{2s} x^{4s+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(4s+1)} \tag{14}$$

$$B_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s 2^{2s+1} x^{4s+3}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(4s+3)} \tag{15}$$

gesetzt worden ist; die zwei letzten Entwicklungen rühren von Knochenhauer[4]) her.

---

1) loc. cit. p. 338.

2) Die Bernoullischen Funktionen und das Taylorsche Theorem, p. 36; Jena 1876.

3) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 204; 1880.

4) Poggendorff Annalen Bd. 41, p. 104; 1837. Undulationstheorie des Lichtes p. 36—37; Berlin 1839.

§ 5. Differentiation und unbestimmte Integration.

Aus den Reihenentwicklungen § 1, (5) und § 3, (3), (4) folgen unmittelbar die Integralausdrücke

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{li}(e^{-x}) = C + \log x + \int_0^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt$$

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{ci}(x) = C + \log x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t}\,dt$$

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{si}(x) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

die für jeden endlichen Wert von x richtig bleiben; aus diesen Formeln finden wir dann ohne weiteres die abgeleiteten Funktionen

$$\text{(4)} \qquad D_x \operatorname{li}(e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{x}$$

$$\text{(5)} \qquad D_x \operatorname{ci}(x) = \frac{\cos x}{x}$$

$$\text{(6)} \qquad D_x \operatorname{si}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

aus denen umgekehrt durch partielle Integration sich ergeben:

$$\text{(7)} \qquad \int_0^x \operatorname{li}(e^{-\alpha x})dx = x \operatorname{li}(e^{-\alpha x}) + \frac{e^{-\alpha x}-1}{\alpha}$$

$$\text{(8)} \qquad \int_0^x \operatorname{ci}(\alpha x)dx = x \operatorname{ci}(\alpha x) - \frac{\sin \alpha x}{\alpha}$$

$$\text{(9)} \qquad \int_0^x \operatorname{si}(\alpha x)dx = x \operatorname{si}(\alpha x) + \frac{\cos \alpha x - 1}{\alpha}.$$

Durch partielle Integration erhalten wir nun weiter aus (1)

$$\text{(10)} \qquad \int_0^x \log t \cdot e^{-t}dt = \operatorname{li}(e^{-x}) - C - e^{-x} \cdot \log x,$$

woraus die noch allgemeinere Integralformel

$$\text{(11)} \qquad \int_0^x \log t \cdot e^{-t\alpha}dt = \frac{1}{\alpha}\left(\operatorname{li}(e^{-\alpha x}) - C - e^{-\alpha x} \cdot \log x - \log \alpha\right)$$

folgt; setzen wir nämlich in (11) $t\alpha = z$, so kommen wir wieder auf (10) zurück. Wenden wir demnach die Definitionen in § 3 (1), (2) an, und führen in (11) $\pm i\alpha$ statt α ein, so entfließen die beiden ähnlichen Formeln

$$(12)\quad \int_0^x \log t \cdot \cos(\alpha t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\left(-\operatorname{si}(\alpha x) - \frac{\pi}{2} + \sin(\alpha x)\cdot\log x\right)$$

$$(13)\quad \int_0^x \log t \cdot \sin(\alpha t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\left(\operatorname{ci}(\alpha x) - C - \cos(\alpha x)\cdot\log x - \log\alpha\right).$$

Wir ziehen nun die drei Funktionen $L(x)$, $C(x)$ und $S(x)$ in Betracht und erhalten ohne weiteres aus § 3, (9), (13) und (14) die Integraldarstellungen

$$(14)\quad L(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} - \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

$$(15)\quad C(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - \int_0^x \cos(t^2)\,dt$$

$$(16)\quad S(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - \int_0^x \sin(t^2)\,dt,$$

aus denen die abgeleiteten Funktionen

$$(17)\quad L^{(1)}(x) = -e^{-x^2}$$

$$(18)\quad C^{(1)}(x) = -\cos(x^2)$$

$$(19)\quad S^{(1)}(x) = -\sin(x^2)$$

folgen, während dann die partielle Integration die folgenden Resultate liefert

$$(20)\quad \int_0^x L(\alpha x)\,dx = xL(\alpha x) - \frac{e^{-\alpha^2x^2} - 1}{2\alpha}$$

$$(21)\quad \int_0^x C(\alpha x)\,dx = xC(\alpha x) + \frac{\sin(\alpha^2x^2)}{2\alpha}$$

$$(22)\quad \int_0^x S(\alpha x)\,dx = xS(\alpha x) - \frac{\cos(\alpha^2x^2) - 1}{2\alpha};$$

die Formeln (11), (12) und (13) finden aber hier kein Analogon.

Umgekehrt erhalten wir drei andere Integralformeln, welche bei der vorigen Funktionengruppe keine ähnliche fanden, nämlich

$$\int \frac{e^{-\alpha x}}{\sqrt{x}}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \cdot L(\sqrt{\alpha x}) \tag{23}$$

$$\int \frac{\cos(\alpha x)}{\sqrt{x}}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \cdot C(\sqrt{\alpha x}) \tag{24}$$

$$\int \frac{\sin(\alpha x)}{\sqrt{x}}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \cdot S(\sqrt{\alpha x}); \tag{25}$$

diese Formeln werden am einfachsten bewiesen, wenn wir nach x differentiieren und dann die vorhergehenden Differentialquotienten anwenden.

Wir erwähnen noch hier zwei Integraldarstellungen, welche aus der Entwicklung

$$e^{-xe^{i\theta}} = 1 + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^s}{s!} (\cos(s\Theta) + i \sin(s\Theta))$$

hervorgehen; trennen wir nämlich das Reelle und das Imaginäre, so finden wir ohne Mühe

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\cos\theta} \cos(x \sin\Theta)\,d\Theta = -\operatorname{si}(x) \tag{26}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\cos\theta} \sin(x \sin\Theta)\,d\Theta = \operatorname{li}(e^{-x}) - \operatorname{ci}(x). \tag{27}$$

§ 6. Die Funktion li (e^{-x}) und die logarithmische Reihe.

Die logarithmische Reihe

$$\log(1-x) = -\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^s}{s} \tag{1}$$

ist bekanntlich für $x = 1$ divergent; es ist indessen möglich, die Veränderliche x in solcher Weise gegen die Einheit konvergieren zu lassen, daß das Restglied in (1) einem bestimmten Grenzwerte und zwar der Funktion li (e^{-x}) zustrebt.

Zu diesem Zwecke setzen wir der Kürze halber

$$S_n(x) = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{x^s}{s}, \quad R_n(x) = -\sum_{s=n+1}^{s=\infty} \frac{x^s}{s} \tag{2}$$

und finden somit, wenn wir in (1) $\left(1-\frac{x}{n}\right)$ statt x einführen,

$$\log x - \log n + S_n\left(1-\frac{x}{n}\right) = R_n\left(1-\frac{x}{n}\right), \tag{3}$$

wo n eine positive ganze, endliche aber willkürlich große Zahl bedeutet.

Unter Anwendung der Binomialformel finden wir ferner eine Entwicklung von dieser Form

$$S_n\left(1-\frac{x}{n}\right) = A_0 - A_1 x + A_2 x^2 = \cdots + (-1)^n A_n x^n, \tag{4}$$

in der der Kürze halber

$$A_0 = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \lambda(n) \tag{5}$$

und allgemeiner für $p \geqq 1$

$$A_p = \frac{1}{n^p}\cdot\left[\frac{\binom{p}{p}}{p} + \frac{\binom{p+1}{p}}{p+1} + \cdots + \frac{\binom{n}{p}}{n}\right] \tag{6}$$

gesetzt worden ist; nun ist aber

$$\frac{\binom{r}{p}}{r} = \frac{\binom{r-1}{p-1}}{p},$$

und somit ergibt sich aus (6) für A_p der folgende Ausdruck:

$$A_p = \frac{1}{p\cdot n^p}\cdot\left[\binom{p-1}{p-1} + \binom{p}{p-1} + \cdots + \binom{n-1}{p-1}\right],$$

woraus unter Anwendung einer bekannten elementaren Identität folgt:

$$A_p = \frac{\binom{n}{p}}{p\cdot n^p} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)}{p!\,p}.$$

Setzen wir demnach für $p \geqq 2$

$$A_p = \frac{1}{p!\,p} - \frac{\delta_p}{2n}, \tag{7}$$

so ergibt sich aus den Ungleichungen

$$1 - \frac{p(p-1)}{2n} < \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right) < 1,$$

daß

$$0 < \delta_p < \frac{1}{p\cdot(p-2)!} \tag{8}$$

sein muß, und somit entfließt aus (3) eine Entwicklung von dieser Form

$$R_n\left(1-\frac{x}{n}\right)=\log x+(\lambda(n)-\log n)+\sum_{s=1}^{s=n}\frac{(-1)^s x^s}{s!\,s}+\frac{1}{2n}\cdot\sum_{s=2}^{s=n}(-1)^s\delta_s x^s.$$

Hieraus ergibt sich, indem wir die positive ganze Zahl n über jede Grenze hinauswachsen lassen, die gesuchte Grenzformel:

$$\lim_{n=\infty} R_n\left(1-\frac{x}{n}\right)=\mathrm{li}(e^{-x}). \tag{9}$$

Unter Anwendung der Formel (3) läßt sich der Grenzwert (9) auch folgendermaßen darstellen:

$$\lim_{n=\infty}\left[-\log n+\sum_{s=1}^{s=n}\frac{\left(-\frac{x}{n}\right)^s}{s}\right]=\mathrm{li}(e^{-x})-\log x. \tag{10}$$

§ 7. Die Funktionen ci(x) und si(x) als Grenzwerte.

Es ist bemerkenswert, daß sich auch für die beiden Funktionen ci(x) und si(x) mit § 6 (9), (10) ähnliche Grenzwerte herleiten lassen.

Zu diesem Zwecke gehen wir von den elementaren Identitäten

$$\sum_{s=0}^{s=n-1}\cos(a+sd)=\frac{\sin(a+(n-\frac{1}{2})d)}{2\sin\frac{d}{2}}-\frac{\sin\left(a-\frac{d}{2}\right)}{2\sin\frac{d}{2}} \tag{1}$$

$$\sum_{s=0}^{s=n-1}\sin(a+sd)=\frac{\cos\left(a-\frac{d}{2}\right)}{2\sin\frac{d}{2}}-\frac{\cos(a+(n-\frac{1}{2})d)}{2\sin\frac{d}{2}} \tag{2}$$

aus, wo n eine endliche positive ganze Zahl bedeutet; setzen wir demnach in (1) und (2) (ax): n statt a und x: n statt d, so erhalten wir Identitäten von dieser Form

$$\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{\cos\left(\frac{a+s}{n}\cdot x\right)}{n}=\frac{\sin x}{x}+K_n \tag{3}$$

$$\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{\sin\left(\frac{a+s}{n}\cdot x\right)}{n}=\frac{1-\cos x}{x}+L_n, \tag{4}$$

und es ist offenbar möglich, eine solche positive ganze Zahl N zu be-

stimmen, daß sowohl $|K_n| < \varepsilon$ als $|L_n| < \varepsilon$ werden, wenn nur $n \geqq N$ angenommen wird, und ε eine vorgegebene positive Größe von willkürlicher Kleinheit bedeutet. Es wird natürlich vorausgesetzt, daß a und x beide endlich sind.

Nach diesen Erörterungen integrieren wir die beiden Identitäten (3) und (4) von 0 bis x und erhalten somit unter Anwendung von § 5, (2), (3)

$$(5) \qquad \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\sin\left(\frac{a+s}{n} \cdot x\right)}{a+s} = \mathrm{si}(x) + \frac{\pi}{2} + K_n'$$

$$(6) \qquad \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\cos\left(\frac{a+s}{n} \cdot x\right) - 1}{a+s} = \mathrm{ci}(x) - C - \log x + L_n',$$

wo K_n' und L_n' ganz dieselben Eigenschaften wie früher K_n und L_n besitzen.

Unter Zuhilfenahme der Funktion

$$(7) \qquad \Psi(x) = D_x \log \Gamma(x) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right)$$

und der Definition § 1, (4) der Eulerschen Konstante ergibt sich demnach aus (6) diese andere Formel

$$(8) \quad \Psi(a) + C - \left[\log n - \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\cos\left(\frac{a+s}{n} \cdot x\right)}{a+s}\right] = \mathrm{ci}(x) - \log x + L_n'',$$

in der L_n'' hinwiederum dieselben Eigenschaften wie früher K_n und L_n besitzt.

Lassen wir aber nun in (5) und (8) die positive ganze Zahl n über jede Grenze hinauswachsen, so entfließen die beiden Grenzformeln

$$(9) \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\sin\left(\frac{a+s}{n} \cdot x\right)}{a+s} = \mathrm{si}(x) + \frac{\pi}{2}$$

$$(10) \quad \Psi(a) - \lim_{n=\infty} \left[\log n - \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\cos\left(\frac{a+s}{n} \cdot x\right)}{a+s}\right] = \mathrm{ci}(x) - \log x - C;$$

für $a = \frac{1}{2}$, $n = 2^{p-1}$ ist die Formel (9) von Fenolio[1]) angegeben worden.

---

1) Zitat von Schlömilch in Zeitschrift für Math. und Phys. Bd. 2, p. 101 (Literaturzeitung).

Wir wollen noch die beiden Grenzwerte (9) und (10) etwas umformen, indem wir die logarithmische Reihe § 6, (1) in Betracht ziehen; setzen wir nämlich in dieser Formel

$$x = e^{i\varphi},\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,$$

so gibt die Trennung des Reellen und des Imaginären die beiden andern Entwicklungen

$$-\log\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\cos(s\varphi)}{s} \tag{11}$$

$$\frac{\pi-\varphi}{2} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\sin(s\varphi)}{s}, \tag{12}$$

die im Intervall $0 < \varphi < 2\pi$ konvergieren.

Setzen wir nun weiter $\varphi = x:n$ und

$$R_n\left(\frac{x}{n}\right) = -\sum_{s=n+1}^{s=\infty} \frac{\cos\left(\frac{sx}{n}\right)}{s},\quad R_n'\left(\frac{x}{n}\right) = -\sum_{s=n+1}^{s=\infty} \frac{\sin\left(\frac{sx}{n}\right)}{s}, \tag{13}$$

so ergeben sich aus (9) und (10) für $a = 1$ die beiden, den § 6, (9), ähnlichen Grenzformeln

$$\lim_{n=\infty} R_n\left(\frac{x}{n}\right) = \mathrm{ci}(x) \tag{14}$$

$$\lim_{n=\infty} R_n'\left(\frac{x}{n}\right) = \mathrm{si}(x), \tag{15}$$

in denen also x als *positiv* anzusehen ist.

Kapitel II.

Integraldarstellungen.

§ 8. Integraldarstellungen der sechs Transzendenten.

Die in § 1, (2) gegebene Integralformel

$$Q(x, \nu) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\nu-1} dt, \tag{1}$$

über deren Integrationsweg wir schon in § 1 geredet haben, ermöglicht es uns unmittelbar allgemein gültige Integraldarstellungen unserer sechs Transzendenten herzuleiten.

Setzen wir nämlich in 1 $\nu = 0$, so erhalten wir wegen § 1, 3

$$\mathrm{li}\, e^{-z} = -\int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt, \tag{2}$$

während die Annahme $\nu = \frac{1}{2}$ unter Anwendung von § 3, 8 die entsprechende Formel

$$L x = \int_x^\infty e^{-t^2} dt \tag{3}$$

liefert. Die beiden so erhaltenen Formeln können sehr leicht verallgemeinert werden; setzen wir nämlich $t = xy$, so folgt

$$\mathrm{li}(e^{-xy}) = -\int_x^\infty \frac{e^{-xy}}{t}\, dt \tag{4}$$

$$L(xy) = y \int_x^\infty e^{-xy^2} dt, \tag{5}$$

wo man in 4 $\Re\, y \geqq 0$, in 5 $\Re\, y^2 \geqq 0$ voraussetzen muß. Unter Zuhilfenahme der Formeln § 3, 1, 2 ergibt sich dann unmittelbar aus 4

$$\mathrm{ci}(xy) = -\int_x^\infty \frac{\cos ty}{t}\, dt \tag{6}$$

$$\mathrm{si}(xy) = -\int_x^\infty \frac{\sin ty}{t}\, dt, \tag{7}$$

während die Definitionen § 3, 10, 11 vermöge 5 die ähnlichen Resultate liefern:

$$C(xy) = y \int_x^\infty \cos x^2 y^2\, dt \tag{8}$$

$$S(xy) = y \int_x^\infty \sin t^2 y^2\, dt; \tag{9}$$

in den vier letzten Formeln darf y nur als *positiv* angesehen werden.

Was die Formeln 4 und 6 betrifft, so darf der Integrationsweg der dort vorkommenden Integrale nicht den Punkt $t = 0$ durchschneiden; denken wir uns x als *positiv* reell, so kann dieser Integrationsweg mit dem entsprechenden Teil der Achse der positiven Zahlen zusammenfallen; ist aber x *negativ* reell, so müssen wir z. B. durch

einen kleinen Halbkreis den Punkt $t = 0$ umgehen; dies steht mit den Formeln § 1, (6) und § 3, (5) in gutem Einklang.

Weiter setzen wir nun in (1) xy statt x, und $t = xy + xy$ und erhalten

$$e^{xy} y^{-\nu} Q(xy, \nu) = \int_0^\infty e^{-ty}(t+x)^{\nu-1} dt, \tag{10}$$

wo also im allgemeinen $\Re(y) > 0$ angenommen werden muß, während das Integral für x negativ reell und $\Re(\nu) \leqq 1$ *sinnlos* wird; aus (10) folgen dann ohne weiteres die beiden anderen Formeln

$$(11)\begin{cases} e^{xy} \cdot \mathrm{li}(e^{-xy}) = -\int_0^\infty \dfrac{e^{-ty}}{t+x} dt, \\ e^{x^2y^2} \cdot L(xy) = \int_0^\infty \dfrac{e^{-t^2y^2} \cdot ty}{\sqrt{t^2+x^2}} dt, \end{cases}$$

während die entsprechenden Formeln für die vier anderen Transzendenten etwas komplizierter werden.

Endlich haben wir noch die von Mellin[1]) herrührende Integralformel

$$\Gamma(\nu)\, x^{\nu-1} e^{xy} Q(xy, 1-\nu) = \int_0^\infty \frac{e^{-ty} t^{\nu-1}}{t+x} dt \tag{12}$$

in Betracht zu ziehen; es muß hierbei in (12) $\Re(y) \geqq 0$, $\Re(\nu) > 0$ angenommen werden, während x niemals Null oder *negativ reell* sein darf.

Für $\nu = 1$ finden wir aus (12) die Formel (11) wieder, während die Annahme $\nu = \frac{1}{2}$ diese andere Darstellung

$$e^{x^2y^2} L(xy) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-t^2y^2}}{t^2+x^2} dt \tag{13}$$

liefert; hier darf demnach x nicht rein imaginär angenommen werden.

Vergleichen wir nun die Integraldarstellungen (4) und (6) mit § 5, (1) und (2), so entfließen die beiden Formeln

$$C + \log x = \int_0^x \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \tag{14}$$

$$C + \log x = \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt + \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt; \tag{15}$$

1) Handbuch der Theorie der Gammafunktion, p. 211.

in ähnlicher Weise ergibt sich aus (7) und § 5, (3) die Formel von Euler

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t}\,dt,\ x > 0. \tag{16}$$

Aus den verschiedenen Integraldarstellungen für $C(x)$ und $S(x)$ finden wir noch die Formeln

$$\sqrt{\frac{\pi}{8}} = \int_0^\infty \cos(t^2)\,dt = \int_0^\infty \sin(t^2)\,dt, \tag{17}$$

während eine Vergleichung der Integrale in (5) und § 5, (14) nichts neues liefert; weil wir den Wert von $\Gamma(\frac{1}{2})$ gebraucht haben, um die Formel § 3, (9) zu bilden.

Wir erwähnen noch, daß die Formel (2) unmittelbar die folgende liefert:

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}; \tag{18}$$

hier darf der Integrationsweg den Punkt $t = 1$ nicht durchschreiten; für x reell und größer als 1 muß daher der Punkt $t = 1$ z. B. durch einen kleinen Halbkreis umgangen werden.

§ 9. Herleitung einiger allgemeinerer Integrale.

Es ist offenbar, daß die Reduktionsformel § 2, (3) für die Q-Funktion uns unmittelbar erlaubt, die Integrale des vorhergehenden Paragraphen zu verallgemeinern.

Setzen wir nämlich in der erwähnten Formel $\nu - n$ statt n, so nimmt sie folgende Form an:

$$(1)\quad \begin{cases} Q(x, \nu - n) = \dfrac{(-1)^n\, Q(x, \nu)}{(n-\nu)(n-1-\nu)\cdots(1-\nu)} + \\ + \dfrac{e^{-x}}{x^n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \dfrac{(-1)^s x^{\nu+s}}{(n-\nu)(n-1-\nu)\cdots(n-s-\nu)}; \end{cases}$$

da nun die Substitution $t = s : \alpha$ die Integralformeln

$$\int_x^\infty e^{-\alpha t} t^{\nu-n-1} dt = \alpha^{n-\nu} \cdot \int_{\alpha x}^\infty e^{-t} t^{\nu-n-1} dt = \alpha^{n-\nu} \cdot Q(\alpha x, \nu - n)$$

liefert, so ergibt sich unmittelbar aus (1)

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_x^\infty e^{-at}t^{\nu-n-1}dt = \frac{(-1)^n a^{n-\nu}\cdot Q(ax,\nu)}{(n-\nu)(n-1-\nu)\cdots(1-\nu)} + \\ \displaystyle + \frac{e^{-ax}}{x^n}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s(ax)^s\cdot x^\nu}{(n-\nu)(n-1-\nu)\cdots(n-s-\nu)}, \end{cases}$$

eine Formel, die sich natürlich auch durch n-malige partielle Integration herleiten läßt.

Die Annahme $\nu = 0$ ergibt nun aus (2) die speziellere Formel

$$(3)\quad \int_x^\infty \frac{e^{-at}}{t^{n+1}}dt = \frac{(-1)^{n+1}a^n \operatorname{li}(e^{-ax})}{n!} + \frac{e^{-ax}}{x^n}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s(ax)^s}{n(n-1)\cdots(n-s)};$$

in ähnlicher Weise findet sich für $\nu = \frac{1}{2}$ die analoge Relation

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_x^\infty \frac{e^{-a^2t^2}}{t^{2n}}dt = \frac{(-1)^n a^{2n-1}L(ax)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}} + \\ \displaystyle + \frac{e^{-a^2x^2}}{2\cdot x^{2n-1}}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s(ax)^{2s}}{\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{2n-2s-1}{2}}. \end{cases}$$

Um nun auch die entsprechenden bestimmten Integrale mit trigonometrischen Funktionen zu erhalten, haben wir die beiden Funktionen

$$(5)\quad \begin{cases} F^{\nu,n}(x) = \cos x\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}}\frac{(-1)^s x^{2s}}{(n-\nu)\cdots(n-2s-\nu)} - \\ \displaystyle - \sin x\cdot\sum_{s=0}^{\leq\frac{n-2}{2}}\frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(n-\nu)\cdots(n-2s-1-\nu)} \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} G^{\nu,n}(x) = \cos x\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{\leq\frac{n-2}{2}}\frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(n-\nu)\cdots(n-2s-1-\nu)} + \\ \displaystyle + \sin x\cdot\sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}}\frac{(-1)^s x^{2s}}{(n-\nu)\cdots(n-2s-\nu)} \end{cases}$$

in Betracht zu ziehen; es ist nämlich

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{e^{-i\alpha x}}{x^n}\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s(i\alpha)^s\cdot x^{s+\nu}}{(n-\nu)(n-1-\nu)\cdots(n-s-\nu)} = \\ = x^{\nu-n}(F^{\nu,n}(\alpha x) - iG^{\nu,n}(\alpha x)). \end{cases}$$

Setzen wir demnach in (3) $\pm i\alpha$ statt α ein, so entfließen die vier folgenden Formeln

(8) $$\int_x^\infty \frac{\cos(\alpha t)}{t^{2n+1}}\,dt = \frac{(-1)^{n+1}\alpha^{2n}\,\mathrm{ci}(\alpha x)}{(2n)!} + \frac{1}{x^{2n}}\cdot F^{0,2n}(\alpha x)$$

(9) $$\int_x^\infty \frac{\sin(\alpha t)}{t^{2n+1}}\,dt = \frac{(-1)^{n+1}\alpha^{2n}\,\mathrm{si}(\alpha x)}{(2n)!} + \frac{1}{x^{2n}}\cdot G^{0,2n}(\alpha x)$$

(10) $$\int_x^\infty \frac{\cos(\alpha t)}{t^{2n}}\,dt = \frac{(-1)^{n}\alpha^{2n-1}\,\mathrm{si}(\alpha x)}{(2n-1)!} + \frac{1}{x^{2n-1}}\cdot F^{0,2n-1}(\alpha x)$$

(11) $$\int_x^\infty \frac{\sin(\alpha t)}{t^{2n}}\,dt = \frac{(-1)^{n}\alpha^{2n-1}\,\mathrm{ci}(\alpha x)}{(2n-1)!} + \frac{1}{x^{2n-1}}\cdot G^{0,2n-1}(\alpha x).$$

Aus (4) finden wir in ähnlicher Weise, nachdem wir $\alpha\cdot\sqrt{\pm i}$ statt α eingeführt haben, die entsprechenden Formeln

(12) $$\int_x^\infty \frac{\cos(\alpha^2 t^2)}{t^{4n}}\,dt = \frac{(-1)^{n}\alpha^{4n-1}\cdot C(\alpha x)}{\frac{4n-1}{2}\cdot\frac{4n-3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}} + \frac{1}{2x^{4n-1}}\cdot F^{\frac{1}{2},2n}(\alpha^2x^2)$$

(13) $$\int_x^\infty \frac{\sin(\alpha^2 t^2)}{t^{4n}}\,dt = \frac{(-1)^{n}\alpha^{4n-1}\cdot S(\alpha x)}{\frac{4n-1}{2}\cdot\frac{4n-3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}} + \frac{1}{2x^{4n-1}}\cdot G^{\frac{1}{2},2n}(\alpha^2x^2)$$

(14) $$\int_x^\infty \frac{\cos(\alpha^2 t^2)}{t^{4n+2}}\,dt = \frac{(-1)^{n+1}\alpha^{4n}\cdot S(\alpha x)}{\frac{4n+1}{2}\cdot\frac{4n-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}} + \frac{1}{2x^{4n+1}}\cdot F^{\frac{1}{2},2n+1}(\alpha^2x^2)$$

(15) $$\int_x^\infty \frac{\sin(\alpha^2 t^2)}{t^{4n+2}}\,dt = \frac{(-1)^{n+1}\alpha^{4n}\cdot C(\alpha x)}{\frac{4n+1}{2}\cdot\frac{4n-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}} + \frac{1}{2x^{4n+1}}\cdot G^{\frac{1}{2},2n+1}(\alpha^2x^2).$$

Es ist hier zu bemerken, daß die Transformation $t=\sqrt{s}$ die folgenden Integralidentitäten

(16) $$\int_x^\infty \frac{e^{-t\alpha^2}}{t^{2n+1}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\int_{x^2}^\infty \frac{e^{-t\alpha^2}}{t^{n+1}}\,dt$$

(17) $$\int_x^\infty \frac{\cos(\alpha^2 t^2)}{t^{2n+1}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\int_{x^2}^\infty \frac{\cos(t\alpha^2)}{t^{n+1}}\,dt$$

(18) $$\int_x^\infty \frac{\sin(\alpha^2 t^2)}{t^{2n+1}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\int_{x^2}^\infty \frac{\sin(t\alpha^2)}{t^{n+1}}\,dt$$

liefert, so daß die entsprechenden Integrale linker Hand sich vermöge der Formeln (3) und (8) bis (11) bestimmen lassen, indem dort α^2 und x^2 statt α und x eingeführt werden.

Aus denselben fünf Formeln (3) und (8) bis (11) können wir endlich noch andere herleiten, wenn wir $t = z + x$ einführen.

§ 10. Integrale von Laplace und Raabe.

Es ist sehr interessant, daß die Formel § 8, (11)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ty}}{t+x}\,dt = -e^{xy}\,\mathrm{li}(e^{-xy}) \tag{1}$$

uns erlaubt, unmittelbar durch einfache Überlegungen mehrere bestimmte Integrale abzuleiten, die sonst in verschiedener, aber sehr komplizierter Weise ermittelt werden.

Setzen wir nämlich in (1) $y = i$ und $-ix$ statt x, so ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{e^{-it}}{t-ix}\,dt = -e^{x}\mathrm{li}(e^{-x}), \tag{2}$$

woraus, indem wir das Zeichen von x ändern, folgt

$$\int_0^\infty \frac{e^{-it}}{t+ix}\,dt = -e^{-x}\mathrm{li}(e^{x}). \tag{3}$$

Denken wir uns nun x vorläufig als *positiv reell*, so ist die Funktion rechter Hand in (2) *reell*, während in (3)

$$-e^{-x}\mathrm{li}(e^{x}) = -e^{-x}\mathrm{li}_1(e^{x}) - i\pi e^{-x} \tag{4}$$

zu setzen ist. Wird umgekehrt x als *negativ reell* angesehen, so ist die Funktion rechter Hand in (3) *reell*, während in (2)

$$-e^{x}\mathrm{li}(e^{-x}) = -e^{x}\mathrm{li}_1(e^{-x}) - i\pi e^{x} \tag{5}$$

gesetzt werden muß.

Die Trennung des Reellen und des Imaginären in (2) und (3) liefert demnach ohne weiteres die folgenden Resultate

$$\int_0^\infty \frac{t\cos t + x\sin t}{t^2+x^2}\,dt = \begin{cases} -e^{x}\mathrm{li}(e^{-x}) \\ -e^{x}\mathrm{li}_1(e^{-x}) \end{cases} \tag{6}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\cos t - t\sin t}{t^2+x^2}\,dt = \begin{cases} 0 \\ -\pi e^{x} \end{cases} \tag{7}$$

$$\int_0^\infty \frac{t\cos t - x\sin t}{t^2+x^2}\,dt = \begin{cases} -e^{-x}\mathrm{li}_1(e^{x}) \\ -e^{-x}\mathrm{li}(e^{x}) \end{cases} \tag{8}$$

$$(9) \qquad \int_0^\infty \frac{x\cos t + t\sin t}{t^2+x^2}\,dt = \begin{cases} \pi e^{-x} \\ 0 \end{cases},$$

je nachdem $x \gtrless 0$ angenommen wird; nach diesen Auseinandersetzungen ist es nunmehr sehr leicht, den folgenden Satz zu beweisen:

Setzt man $x' = \pm x$, *je nachdem* $\Re(x) \gtrless 0$ *ist, so daß* $\Re(x')$ *immer positiv wird, dann hat man die folgenden Integraldarstellungen:*

$$(10) \qquad \int_0^\infty \frac{t\cos t}{t^2+x^2}\,dt = -\frac{1}{2}(e^{x'}\cdot \mathrm{li}\,(e^{-x'}) + e^{-x'}\cdot \mathrm{li}_1\,(e^{x'}))$$

$$(11) \qquad \int_0^\infty \frac{x'\sin t}{t^2+x^2}\,dt = -\frac{1}{2}\,(e^{x'}\cdot \mathrm{li}\,(e^{-x'}) - e^{-x'}\cdot \mathrm{li}_1\,(e^{x'}))$$

$$(12) \qquad \int_0^\infty \frac{t\sin t}{t^2+x^2}\,dt = \int_0^\infty \frac{x'\cos t}{t^2+x^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot e^{-x'}.$$

Durch Addition oder Subtraktion der Formeln (6), (8) und (7), (9) ergibt sich nämlich unmittelbar, daß die drei genannten Formeln für *reelle* x richtig sind. Die betreffenden bestimmten Integrale sind für *rein imaginäre* x sinnlos, stellen aber sonst in x analytische Funktionen dar. Da nun die Ausdrücke rechter Hand, außer vielleicht in $x = 0$, auch analytische Funktionen dieser Veränderlichen darstellen, so sind damit unsere Formeln endgiltig bewiesen.

Die Formel (12) war schon in spezielleren Fällen Laplace[1]) bekannt; die beiden anderen rühren für positive x von Raabe[2]) her; später sind sie mehrmals von Schlömilch[3]) und dann von Beau[4]), Stieltjes[5]) und Kronecker[6]) hergeleitet worden. In der oben gegebenen Allgemeinheit scheinen unsere Formeln neu zu sein.

1) Mém. de l'Acad. des Sciences 1782. Théorie analytique des probabilites, IIe Partie, chap. 1.

2) Die Differential- und Integralrechnung Bd. I, p. 369; Zürich 1839.

3) Grunert Archiv Bd. 5, p. 204; 1844. Zeitschrift für Math. und Phys. Bd. 10, p. 155; 1865. Kompendium Bd. II, p. 203; 1879.

4) Analytische Untersuchungen im Gebiete d. trig. Reihen und der Fourierschen Integrale, p. 34; Halle 1885.

5) Annales de l'Ec. Normale (3) Bd. 3, p. 221—222; 1886.

6) Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale, p. 211; Leipzig, Teubner 1894.

Aus (12) folgt, indem $\Re(x) > 0$ angenommen wird:

$$(13) \qquad \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{li}(e^{-x}) = \int_0^\infty \frac{\cos t}{t} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x}\right) dt, \quad \Re(x) > 0,$$

woraus unter Anwendung der Identität

$$\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$$

sich ergibt

$$(14) \quad \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{li}(e^{-x}) - \operatorname{li}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)\right) = \int_0^\infty \frac{\cos t}{t} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t\left(x - \frac{1}{x}\right)}{1+t^2}\right) dt, \quad \Re(x) > 0,$$

und somit entfließt für $\left|x - \frac{1}{x}\right| \leqq 1$ die Reihenentwicklung

$$(15) \qquad \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{li}(e^{-x}) - \operatorname{li}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)\right) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s a_s}{2s+1} \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)^{2s+1},$$

wo der Kürze halber

$$(16) \qquad a_n = \int_0^\infty \frac{t^{2n} \cos t}{(1+t^2)^{2n+1}}\, dt$$

gesetzt worden ist.

Die letzten Formeln von (13) an verdanken wir Schlömilch.[1])

§ 11. Integrale von Schlömilch.

Wir haben nunmehr aus der Formel von Mellin, § 8, (12):

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-ty} t^{\nu-1}}{t+x}\, dt = \Gamma(\nu) e^{xy} x^{\nu-1} Q(xy, 1-\nu)$$

verschiedene andere Integraldarstellungen von derselben Natur wie die vorhergehenden abzuleiten.

Zu diesem Zwecke differentiieren wir die Formel (1) nach ν; die Annahme $\nu = 1$ ergibt dann ohne weiteres die folgende Integraldarstellung:

$$(2) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-ty} \log t}{t+x}\, dt = e^{xy} \operatorname{li}(e^{-xy})(C - \log x) - e^{xy} D_\nu Q(xy, \nu)_{\nu=0},$$

wo wie gewöhnlich C die Eulersche Konstante bedeutet. Um nun

1) Grunert Archiv Bd. 9, p. 313; 1847.

die letzte Funktion rechter Hand in (1) näher zu untersuchen, gehen wir von der Differenzengleichung § 2, (1)

$$Q(x, \nu + 1) = \nu\, Q(x, \nu) + e^{-x} x^{\nu}$$

aus und erhalten durch zweimalige Differentiation nach ν

$$(3) \qquad D_\nu Q(x, \nu)_{\nu=0} = \frac{1}{2} D_\nu^2 Q(x, \nu)_{\nu=1} - \frac{e^{-x}}{2} \cdot (\log x)^2;$$

weiter ergibt sich aus der Identität

$$Q(x, \nu) = \Gamma(\nu) - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{s+\nu}}{s!\,(s+\nu)}$$

eine Entwicklung von der Form

$$(4) \quad D_\nu^2 Q(x, \nu)_{\nu=1} = (e^{-x} - 1)(\log x)^2 - 2 \log x \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^s}{s!\, s} + 2F(x),$$

in der $F(x)$ eine in x ganze transzendente Funktion bezeichnet; eine Anwendung der bekannten Formel[1])

$$\Gamma^{(2)}(1) = \frac{\pi^2}{6} + C^2,$$

wo C die Eulersche Konstante bedeutet, ergibt nämlich für $F(x)$ den Ausdruck

$$(5) \qquad F(x) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{C^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^s}{s!\, s^2}.$$

Nach diesen Erörterungen ergibt sich nun unmittelbar durch Vergleichung der Formeln (3), (4) und (5) die Identität

$$(6) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ty} \log t}{t + x}\, dt = e^{xy}\, \mathrm{li}\,(e^{-xy})(C - \log x) + \frac{e^{xy}}{2} (\log (xy))^2 + \\ \qquad + e^{xy} \log (xy) \cdot \displaystyle\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (xy)^s}{s!\, s} - e^{xy} \cdot F(xy); \end{cases}$$

setzen wir demnach in (6) $y = i$ und $-ix$ statt x, wo x vorläufig als *positiv* anzusehen ist, so entfließt durch Trennung des Reellen und des Imaginären die Formel

$$(7) \qquad \int_0^\infty \frac{x \cos t - t \sin t}{t^2 + x^2} \log t\, dt = \frac{\pi}{2} \cdot e^x\, \mathrm{li}\,(e^{-x});$$

---

1) Handbuch der Theorie der Gammafunktion, p. 43.

setzen wir aber in (6) ix statt x ein, wo das neue x wieder *positiv* ist, und erinnern wir uns der Identität

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^s}{s!\,s} = \mathrm{li}_1(e^x) - C - \log x,$$

so ergibt sich in ähnlicher Weise

$$(8) \qquad \int_0^\infty \frac{x\cos t + t\sin t}{t^2+x^2} \log t\,dt = \pi e^{-x}\log x - \frac{\pi}{2} e^{-x}\,\mathrm{li}_1(e^x).$$

Durch Addition oder Subtraktion der beiden so erhaltenen Formeln finden wir nun in ähnlicher Weise wie im vorhergehenden Paragraphen den folgenden Satz:

Es sei $x' = \pm x$, je nachdem $\Re(x) \gtrless 0$ ist, so daß $\Re(x')$ immer positiv wird, dann erhält man die beiden Integralformeln:

$$(9) \qquad \int_0^\infty \frac{x'\cos t\log t}{t^2+x^2}\,dt = \frac{\pi}{2} e^{-x'}\log x' - \frac{\pi}{4}\left(e^{-x'}\,\mathrm{li}_1(e^{x'}) - e^{x'}\,\mathrm{li}(e^{-x'})\right)$$

$$(10) \qquad \int_0^\infty \frac{t\sin t\log t}{t^2+x^2}\,dt = \frac{\pi}{2} e^{-x'}\log x' - \frac{\pi}{4}\left(e^{-x'}\,\mathrm{li}_1(e^{x'}) + e^{x'}\,\mathrm{li}(e^{-x'})\right).$$

Diese beiden Formeln sind zum wiederholten Male aber stets in recht komplizierter Weise von Schlömilch[1]) hergeleitet worden.

§ 12. Integralbestimmungen durch $L(x)$, $C(x)$, $S(x)$ und $\varrho(x)$.

Durch die Substitution

$$zx + \frac{y}{2x} = t$$

finden wir unmittelbar aus § 8, (3) diese andere Integraldarstellung

$$\int_0^\infty e^{-\left(zx+\frac{y}{2x}\right)^2} dz = \frac{1}{x}\cdot L\left(\frac{y}{2x}\right),$$

die auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-\varrho^2 x^2 - ty} dz = \frac{e^{\frac{y^2}{4x^2}}}{x}\cdot L\left(\frac{y}{2x}\right);$$

---

1) Grunert Archiv Bd. 4, p. 104; 1843. Zeitschrift für Math. und Phys. Bd. 18, p. 318, 319; 1873. Kompendium Bd. II, p. 205; 1879.

eine Anwendung der Identität

$$L(x) + L(-x) = \sqrt{\pi}$$

ergibt dann unmittelbar aus (1) die beiden anderen Formeln

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-t^2x^2} \cos(ty)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x} \cdot e^{-\frac{y^2}{4x^2}}$$

$$(3) \qquad \int_0^\infty e^{-t^2x^2} \sin(ty)\,dt = \frac{e^{-\frac{y^2}{4x^2}}}{2xi}\left(L\left(\frac{y}{2xi}\right) - L\left(-\frac{y}{2xi}\right)\right),$$

von welchen die erste altbekannt ist, während die letzte neu zu sein scheint.

Weiter setzen wir in (1) $2y$ statt y und $\sqrt{xi}$ statt x, dann folgt

$$(4) \qquad \int_0^\infty e^{-2yt}\left(\cos(t^2x) - i \sin(t^2x)\right)dt = \frac{e^{-\frac{iy^2}{x}}}{\sqrt{xi}} \cdot L\left(\frac{y}{\sqrt{xi}}\right);$$

eine Anwendung der Definitionen § 3, (10), (11) ergibt dann unmittelbar diese beiden von Schlömilch[1]) in ganz anderer Weise hergeleiteten Integraldarstellungen:

$$(5) \qquad \int_0^\infty e^{-2xt} \cos(t^2)\,dt = \cos(x^2)S(x) - \sin(x^2)C(x)$$

$$(6) \qquad \int_0^\infty e^{-2xt} \sin(t^2)\,dt = \cos(x^2)C(x) + \sin(x^2)S(x),$$

welche für $\Re(x) \geqq 0$ anwendbar sind.

Wir haben hier noch, mit Raabe, zu zeigen, daß die durch die Formel

$$(7) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-t^2x^2}}{\sqrt{t^2+y^2}}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{y} \cdot e^{x^2y^2}\varrho(xy)$$

definierte, mit $L(x)$ ähnliche Funktion uns gestattet, verschiedene Integrale in einfacher Form zu bestimmen.

Erstens bemerken wir, daß die Substitution $t = \sqrt[m]{x}$, wo $\Re(m) > 0$ vorausgesetzt wird, ohne weiteres die Identität

$$(8) \qquad \int_0^\infty e^{-(a^2t^m + t^{-m})} \cdot \frac{dt}{t} = \frac{1}{m} \cdot \int_0^\infty e^{-(a^2t + t^{-1})} \cdot \frac{dt}{t}$$

---

1) Zeitschrift für Math. und Phys. Bd. 10, p. 76—80; 1865.

liefert, so daß wir nur das letzte dieser Integrale zu untersuchen haben, um beide zu kennen; wir ziehen es indessen vor, $m = 2$ zu setzen und finden dann unmittelbar

$$(9) \qquad \int_0^\infty e^{-(a^2t^2+t^{-2})} \cdot \frac{dt}{t} = e^{-2a} \cdot \int_0^\infty e^{-(at-t^{-1})^2} \cdot \frac{dt}{t}.$$

Nach diesen Vorbereitungen setzen wir rechter Hand in (9)

$$\int_0^\infty = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{a}}} + \int_{\sqrt{\frac{1}{a}}}^\infty$$

und erhalten dann durch die Substitution

$$at - \frac{1}{t} = -z, \quad t = \frac{-z + \sqrt{z^2+4a}}{2a}$$

die Integralidentität

$$\int_0^{\sqrt{\frac{1}{a}}} = \int_0^\infty \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{z^2+4a}}\, dz;$$

in ähnlicher Weise führt die Substitution

$$at - \frac{1}{t} = +z, \quad t = \frac{z + \sqrt{z^2+4a}}{2a}$$

zu der anderen Identität

$$\int_{\sqrt{\frac{1}{a}}}^\infty = \int_0^\infty \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{z^2+4a}}\, dz,$$

und somit entfließt aus (9) die von Raabe[1]) herrührende interessante Integralidentität

$$(10) \qquad \int_0^\infty e^{-(a^2t^2+t^{-2})} \cdot \frac{dt}{t} = 2e^{-2a} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t^2+4a}}\, dt,$$

aus der unter Anwendung von (7), indem dort $x = 1$, $y = \sqrt{4a}$ gesetzt wird, folgt:

$$(11) \qquad \int_0^\infty e^{-(a^2t^2+t^{-2})} \cdot \frac{dt}{t} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{2a} \cdot \varrho\left(\sqrt{4a}\right).$$

---

1) Die Differential- und Integralrechnung Bd. I, p. p. 374, 372; Zürich 1839.

Weiter betrachten wir mit Raabe[1]) die Integralidentität

$$\int_0^\infty \cos(ax)\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+x^2)}d\alpha\Big)dx = \int_0^\infty e^{-\alpha^2}\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha^2x^2}\cos(ax)dx\Big)d\alpha;$$

eine Anwendung der Formel (2) und der elementaren Integralrelation

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+x^2)}d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

führt uns dann unmittelbar zu der anderen von Raabe herrührenden Identität

$$\int_0^\infty e^{-\left(t+\frac{x^2}{4t}\right)}\cdot\frac{dt}{t} = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1+t^2}}\,dt,$$

aus der, indem wir das Integral linker Hand durch die Substitution $t = 1:z$ umformen und dann die Formel (11) anwenden, folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\cdot e^x\cdot\varrho\,(\sqrt{2x}). \tag{12}$$

§ 13. Über das Produkt $Q(\alpha x,\nu)\cdot Q(\beta x,\varrho)$.

Aus einer allgemeinen Integralformel, welche ich in meinem *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, p. 120 entwickelt habe, ergibt sich unter Anwendung der Formel § 8, (12):

$$\int_0^\infty \frac{e^{-tx}t^{\nu-1}}{t+\alpha}\,dt = \Gamma(\nu)e^{\alpha x}\alpha^{\nu-1}Q(\alpha x,1-\nu)$$

eine Integraldarstellung von dieser Form

$$\Gamma(\nu)\Gamma(\varrho)\alpha^{\nu-1}\beta^{\varrho-1}Q(\alpha x,1-\nu)Q(\beta x,1-\varrho)e^{\alpha x+\beta x} = \int_0^\infty e^{-tx}h(t)dt, \tag{1}$$

wo der Kürze halber

$$h(t) = \int_0^t \frac{z^{\nu-1}}{z+\alpha}\cdot\frac{(t-z)^{\varrho-1}}{t-z+\beta}\,dz \tag{2}$$

gesetzt worden ist.

---

1) Die Differential- und Integralrechnung Bd. I, p. p. 374, 372; Zürich 1839.

Die Identität

$$\frac{1}{t+\alpha+\beta} \cdot \left(\frac{1}{z+\alpha} + \frac{1}{t-z+\beta} \right) = \frac{1}{(z+\alpha)(t-z+\beta)}$$

ergibt dann nach einer einfachen Umformung

$$(3)\quad h(t) = \frac{1}{t+\alpha+\beta} \cdot \left(\int_0^t \frac{z^{\nu-1}(t-z)^{\varrho-1}}{z+\alpha}\, dz + \int_0^t \frac{z^{\varrho-1}(t-z)^{\nu-1}}{z+\beta}\, dz \right),$$

so daß uns nur übrig bleibt das bestimmte Integral

$$(4)\quad H^{\nu,\varrho}(t,\alpha) = \int_0^t \frac{z^{\nu-1}(t-z)^{\varrho-1}}{z+\alpha}\, dz = t^{\nu+\varrho-1} \cdot \int_0^1 \frac{z^{\nu-1}(1-z)^{\varrho-1}}{\alpha+tz}\, dz$$

näher zu untersuchen, denn es ist offenbar wegen (3)

$$(5)\quad h(t) = \frac{1}{t+\alpha+\beta} \cdot \left[H^{\nu,\varrho}(t,\alpha) + H^{\varrho,\nu}(t,\beta) \right].$$

Denken wir uns nun vorläufig $|\alpha| > |t|$, so ist

$$\frac{z^{\nu-1}(1-z)^{\varrho-1}}{\alpha+tz} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s t^s}{\alpha^{s+1}} \cdot z^{\nu+s-1}(1-z)^{\varrho-1},$$

und somit ergibt das erste Eulersche Integral diesen Ausdruck

$$(6)\quad H^{\nu,\varrho}(t,\alpha) = \frac{t^{\nu+\varrho-1}}{\alpha} \cdot \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\nu+\varrho)} \cdot F\left(\nu, 1, \nu+\varrho, -\frac{t}{\alpha}\right),$$

wo F die gewöhnliche hypergeometrische Reihe bedeutet; aus der von Euler herrührenden Formel

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

ergibt sich dann ohne Mühe aus (6)

$$(7)\quad H^{\nu,\varrho}(t,\alpha) = \frac{t^{\nu+\varrho-1}}{t+\alpha} \cdot \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\nu+\varrho)} \cdot F\left(\varrho, 1, \nu+\varrho, \frac{t}{t+\alpha}\right),$$

und somit entfließt endlich die gesuchte Formel

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^{\nu-1}\beta^{\varrho-1} e^{\alpha x+\beta x} \cdot Q(\alpha x, 1-\nu)\, Q(\beta x, 1-\varrho) = \\ = \dfrac{1}{\Gamma(\nu+\varrho)} \int_0^\infty \dfrac{e^{-tx} \cdot t^{\nu+\varrho-1}}{t+\alpha+\beta} \cdot \left(\dfrac{F\left(\varrho, 1, \varrho+\nu, \frac{t}{t+\alpha}\right)}{t+\alpha} + \dfrac{F\left(\nu, 1, \varrho+\nu, \frac{t}{t+\beta}\right)}{t+\beta} \right) dt. \end{array} \right.$$

Setzen wir in (8) speziell $\nu = \varrho = 1$, so erhalten wir nach einer einfachen Reduktion die Integraldarstellung

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} & e^{(\alpha+\beta)x}\,(\mathrm{li}\,(e^{-\alpha x})\,\mathrm{li}\,(e^{-\beta x}) - \log(\alpha\beta)\,\mathrm{li}\,(e^{-\alpha x-\beta x})) = \\ & = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}\log((\alpha+t)(\beta+t))}{t+\alpha+\beta}\,dt, \end{aligned} \right.$$

aus der verschiedene andere hergeleitet werden können.

Erstens gibt die Annahme $\alpha = \beta = 1$ nach der Substitution $t = u - 1$ die in ganz anderer Weise von Winckler[1]) gefundene Formel

$$(10)\qquad e^x\,(\mathrm{li}\,(e^{-x}))^2 = 2\cdot\int_1^\infty \frac{e^{-tx}\log t}{1+t}\,dt, \quad \Re(x) > 0.$$

Zweitens setzen wir in (9) $i\alpha$ statt α und $\beta = -i\alpha$, dann ergibt sich

$$\mathrm{li}\,(e^{i\alpha x})\,\mathrm{li}\,(e^{-i\alpha x}) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{t}\cdot\log\left(1+\frac{t^2}{\alpha^2}\right)dt,$$

woraus unter Zuhilfenahme der Formeln § 3, (1), (2) und unter Anwendung der Substitution $t = \alpha\,\mathrm{tg}\,\Theta$ folgt:

$$(11)\quad (\mathrm{ci}\,(x))^2+(\mathrm{si}\,(x))^2 = -2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x\,\mathrm{tg}\,\Theta}\log\cos\Theta}{\cos\Theta\sin\Theta}\,d\Theta, \quad \Re(x) > 0,$$

eine Integraldarstellung, die in ganz anderer Weise und in etwas anderer Form von Enneper[2]) gefunden worden ist.

Aus (10) finden wir durch Differentiation nach x

$$(12)\qquad \frac{\mathrm{li}\,(e^{-x})}{x} = -\int_1^\infty e^{-tx}\log t\cdot dt;$$

führen wir noch die ganze transzendente Funktion

$$(13)\qquad G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}\log t}{1+t}\,dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s\beta^{(1)}(s+1)}{s!}\,x^s$$

ein, in der $\beta(x)$ die aus der Theorie der Gammafunktion bekannte Transzendente bedeutet:

---

1) Journal für Mathematik Bd. 45, p. 147—148; 1853.

2) Zeitschrift für Math. und Physik Bd. 6, p. 407; 1861.

$$(14) \qquad \beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{x+s} = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt,$$

so ergibt sich wegen (10)

$$(15) \qquad \frac{e^x}{2}(\mathrm{li}(e^{-x}))^2 + G(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}\log t}{1+t}\,dt.$$

Die Vergleichung der beiden Formeln (15) und § 11, (4) liefert eine Relation zwischen den beiden Funktionen $F(x)$ und $G(x)$; nach einigen Reduktionen und nach einer Differentiation reduziert sich diese Relation auf eine *formale* Identität.

Zweitens setzen wir in der allgemeinen Formel (8) $\nu = \varrho = \frac{1}{2}$, dann resultiert diese andere spezielle Integraldarstellung

$$(16) \quad \frac{4e^{\alpha x+\beta x}}{\sqrt{\alpha\beta}} \cdot L(\sqrt{\alpha x})\,L(\sqrt{\beta x}) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{t+\alpha+\beta}\left(\frac{1}{\alpha\sqrt{1+\frac{t}{\alpha}}} + \frac{1}{\beta\sqrt{1+\frac{t}{\beta}}}\right)dt,$$

aus der für $\alpha = \beta = 1$ und nach einer einfachen Umformung folgt

$$(17) \qquad \frac{1}{x}\cdot(L(x))^2 = \int_{x\sqrt{2}}^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^2-x^2}}\cdot\frac{dt}{t},$$

eine Formel, die in etwas anderer Form von Winckler[1]) angegeben worden ist. Setzen wir in (16) $\alpha = i = -\beta$ und $t = tg\Theta$, so erhalten wir die mit Formel (11) analoge Darstellung

$$(18) \qquad (C(x))^2 + (S(x))^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2 ty\Theta}\cdot\sin\frac{\Theta}{2}\cdot\frac{\sqrt{\cos\Theta}}{\sin 2\Theta}\,d\Theta.$$

Wir bemerken noch, ohne darauf näher einzugehen, daß auch die Annahme $\nu = 1, \varrho = \frac{1}{2}$ uns elementare Funktionen unter dem Integralzeichen in (8) gibt.

§ 14. Über einen Integralsatz von Bessel.

Nachdem wir in den vorhergehenden Paragraphen dieses Kapitels diejenigen einfachen bestimmten Integrale, welche elementare Funktionen enthalten und sich unter endlicher Form durch die sechs Transzendenten darstellen lassen, entwickelt haben, bemerken wir noch, daß wir verschiedene andere Integrale derselben Natur

1) Journal für Mathematik Bd. 45, p. 110—111; 1853.

kennen. Da diese Integrale indessen wegen ihrer komplizierten Form kein besonderes Interesse darbieten, wollen wir uns hier auf den folgenden allgemeinen Integralsatz, von welchem schon Bessel[1]) einen recht weitgehenden Spezialfall erwähnt hat, beschränken:

Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei in x ganze rationale Funktionen, so daß die Gleichung $\psi(x)=0$ keine andere reelle Wurzeln als negative Zahlen hat, dann ist das bestimmte Integral

$$J=\int_0^\infty \frac{e^{-tx}\varphi(t)}{\psi(t)}dt,\ \Re(x)>0, \tag{1}$$

unter endlicher Form durch Integrallogarithmen ausdrückbar.

Setzen wir nämlich identisch

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=\chi(t)+\sum_{s=1}^{s=n}\frac{A_s}{(t+\alpha_s)^{r_s}}, \tag{2}$$

wo $\chi(t)$ eine in t ganze rationale Funktion bedeutet, während die Exponenten r_s sämtlich positiv ganz sind, so folgt offenbar nach einer einfachen Umformung

$$J=\int_0^\infty e^{-tx}\chi(t)dt+\sum_{s=1}^{s=n}A_s\cdot e^{\alpha_s x}\cdot\int_{\alpha_s}^\infty \frac{e^{-tx}}{t^{r_s}}dt; \tag{3}$$

da nun das erste Integral rechter Hand in (3) eine in x rationale Funktion darstellen muß, so ist der Satz eine unmittelbare Folge der Integralformel § 9, (3).

Setzen wir nun speziell voraus, daß die ganze rationale Funktion $\chi(t)$ verschwindet, und daß die Exponenten r_s sämtlich gleich Eins sind, so folgt aus (3) die speziellere Formel:

$$-\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}e^{-tx}dt=\sum_{s=1}^{s=n}\frac{\varphi(\alpha_s)}{\psi^{(1)}(\alpha_s)}\cdot e^{\alpha_s x}\cdot \mathrm{li}(e^{-\alpha_s x}). \tag{4}$$

Denken wir uns nun weiter, daß die in $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ vorkommenden Koeffizienten sämtlich reell sind, und daß die Wurzeln der Gleichung $\psi(x)=0$ sämtlich rein imaginär sind, so müssen diese Wurzeln in gleicher Zahl und paarweise, von der Form $\pm i\alpha_s$, vorkommen. Setzen wir demnach $2n$ statt n und

$$\frac{\varphi(i\alpha_s)}{\psi^{(1)}(i\alpha_s)}=\varrho_s\cdot e^{i\vartheta_s},$$

1) Abhandlungen Bd. II, p. 340.

so erhalten wir unter Zuhilfenahme der Definitionen § 3, (1), (2) eine Identität von der Form

$$\frac{\varphi(i\alpha_s)}{\psi^{(1)}(i\alpha_s)} \cdot e^{i\alpha_s x} \cdot \operatorname{li}(e^{-i\alpha_s x}) + \frac{\varphi(-i\alpha_s)}{\psi^{(1)}(-i\alpha_s)} \cdot e^{-i\alpha_s x} \cdot \operatorname{li}(e^{i\alpha_s x}) =$$

$$= 2\varrho_s \cdot [\cos(v_s + \alpha_s x)\operatorname{ci}(\alpha_s x) + \sin(v_s + \alpha_s x) \cdot \operatorname{si}(\alpha_s x)],$$

und somit nimmt die Formel (4) diese andere Form an:

$$(5) \quad \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} e^{-tx}\, dt = -2 \cdot \sum_{s=1}^{s=n} [\varrho_s \cdot \cos(v_s + \alpha_s x)\operatorname{ci}(\alpha_s x) + \sin(v_s + \alpha_s x) \cdot \operatorname{si}(\alpha_s x)].$$

Unter Anwendung der beiden Integralformeln (4) und (5) können wir unmittelbar zahlreiche speziellere Formeln herleiten, welche Bierens de Haan[1]) direkt und mit beträchtlicher Mühe entwickelt hat. Wir wollen als einziges Beispiel den Fall

$$\varphi(t) = 1, \quad \psi(t) = t^3 + t^2 + t + 1$$

näher untersuchen; wir finden hier

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1} - \frac{1+i}{4} \cdot \frac{1}{t-i} - \frac{1-i}{4} \cdot \frac{1}{t+i},$$

woraus für das imaginäre Wurzelpaar folgt:

$$\varrho = 2\sqrt{2}, \quad v = \frac{\pi}{4} + \pi,$$

und somit ergibt sich unmittelbar die gesuchte Formel:

$$(6) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-tx}\, dt}{t^3 + t^2 + t + 1} = \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{ci}(x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{si}(x)}{\sqrt{2}} - \frac{e^x \operatorname{li}(e^{-x})}{2}.$$

Kapitel III.

Asymptotische Reihen und Kettenbrüche.

§ 15. Asymptotische Reihe für die Q-Funktion.

Unter Anwendung der Integralformel § 8, (10) habe ich neuerdings[2]) für $Q(x, \nu)$, als Funktion von x betrachtet, eine asymptotische Reihe entwickelt, welche für jeden Wert von x mit sehr

1) Verhandelingen der Amsterdamer Akademie. Bd. 2, 1855 und Bd. 5, 1857.

2) Mathematische Annalen Bd. 59, p. 92; 1904.

großem absoluten Betrage anwendbar ist; indessen ist das Restglied dieser Reihe ziemlich kompliziert.

Für die Untersuchung der spezielleren Transzendenten, welche wir hier eingeführt haben, reicht aber die Formel von Mellin § 8, (12):

$$\Gamma(\nu)x^{\nu-1}e^{xy}Q(xy, 1-\nu) = \int_0^\infty \frac{e^{-ty}t^{\nu-1}}{t+x}dt \tag{1}$$

vollkommen aus, und mit Zuhilfenahme dieser Formel ist es sehr leicht, einen äußerst einfachen Majorantwert des Restgliedes der asymtotischen Reihe herzuleiten.

Zu diesem Zwecke gehen wir von der elementaren Identität

$$\frac{1}{x+t} = \frac{1}{x} - \frac{t}{x^2} + \frac{t^2}{x^3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}t^{n-1}}{x^n} + \frac{(-1)^n t^n}{x^n(x+t)} \tag{2}$$

aus; eine Anwendung der altbekannten Integralformel

$$\int_0^\infty e^{-tx}t^{\varrho-1}dt = \frac{\Gamma(\varrho)}{x^\varrho},\ \Re(x) \geq 0,\ \Re(\varrho) > 0 \tag{3}$$

ergibt dann ohne weiteres, wenn der Ausdruck (2) in (1) eingeführt wird, die folgende Entwicklung:

$$\Gamma(\nu)e^{xy}Q(xy, 1-\nu) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s\Gamma(\nu+s)}{(xy)^{s+\nu}} + R_n, \tag{4}$$

wo der Kürze halber

$$R_n = \frac{(-1)^n}{x^{n+\nu-1}} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-ty}t^{\nu+n-1}}{t+x}dt \tag{5}$$

gesetzt worden ist.

Die Formel (4) ist zwar augenblicklich nur unter der Voraussetzung $\Re(\nu) > 0$ abgeleitet worden; eine Vergleichung des Restgliedes (5) mit der Integralformel (1) zeigt indessen, daß unsere Formel (4) nur eine Umschreibung der Reduktionsformel § 2, (3) sein kann, und somit ist auch (4) anwendbar, falls nur $\Re(\nu+n) > 0$ vorausgesetzt wird.

Der Spezialfall $\nu = 1$ von (4) rührt schon von Mascheroni[1]) her. Um nun einen Majorantwert von $|R_n|$ angeben zu können, setzen wir in (5)

$$x = re^{i\vartheta},\ y = r_1e^{i\vartheta_1},\ xy = rr_1e^{i(\vartheta+\vartheta_1)},\ \nu = \nu_1 + i\nu_2,$$

wo die neu eingeführten Größen sämtlich reell sind, und somit erhalten wir die Ungleichung

1) Zitat von Bretschneider im Journal für Mathematik Bd. 17, p. 260; 1837.

$$|R_n| \leqq \frac{r}{r^{n+\nu_1}} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-tr_1\cos v_1}\, t^{\nu_1+n-1}}{|t+x|}\, dt,$$

so daß man demnach $0 \leqq \nu_1 < \frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2} < \nu_1 \leqq 0$ und v von $\pm\pi$ verschieden annehmen muß.

Nun ist aber für $t \geqq 0$

$$|t + r\cos v + ir\sin v|^2 = (t+r)^2 - 4tr\sin^2\frac{v}{2}$$

und für reelle t und r

$$(t+r)^2 \geqq 4tr;$$

daher finden wir ohne weiteres

$$|t + r\cos v + ir\sin v|^2 > (t+r)^2\cos^2\frac{v}{2} \geqq r^2\cos^2\frac{v}{2},$$

und somit entfließt wegen (4) der gesuchte Majorantwert

$$|R_n| < \frac{\Gamma(\nu_1+n)}{(rr_1\cos\nu_1)^{\nu_1+n} \cdot \left|\cos\frac{v}{2}\right|}. \tag{6}$$

Wenn x nicht negativ reell angenommen wird, so darf in (4) $y = 1$ gesetzt werden, und somit ist der folgende Satz bewiesen:

Es sei $x = |x| \cdot e^{i\Theta}$ eine komplexe Veränderliche mit sehr großem absoluten Betrage, und $-\pi < \Theta < +\pi$, dann gilt die asymptotische Entwicklung:

$$\Gamma(\nu)e^x Q(x, 1-\nu) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s\Gamma(\nu+s)}{x^{\nu+s}} + R_n \tag{7}$$

wo, indem $\nu = \nu_1 + i\nu_2$ gesetzt wird,

$$|R_n| < \frac{\Gamma(\nu_1+n)}{|x|^{\nu_1+n} \cdot \cos\frac{\Theta}{2}} \tag{8}$$

angenommen werden darf. Die Reihe (7) *bleibt wohl auch für $\Theta = \pm\pi$ anwendbar; der Majorantwert* (8) *muß aber dann durch* (6) *ersetzt werden.*

Für den Integrallogarithmus $\mathrm{li}(e^{-x})$ finden wir daher

$$e^x \cdot \mathrm{li}(e^{-x}) = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^s(s-1)!}{x^s} + R_n, \quad |R_n| < \frac{n!}{|x|^{n+1} \cdot \cos\frac{\Theta}{2}} \tag{9}$$

und für die Krampsche Transzendente

$$e^x \cdot L(\sqrt{x}) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s\Gamma(s+\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi} \cdot x^{s+\frac{1}{2}}} + R_n, \quad |R_n| < \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi} \cdot |x|^{n+\frac{1}{2}} \cdot \cos\frac{\Theta}{2}}; \tag{10}$$

für negative x müssen die Majorantwerte in (9) und (10) aus der komplizierteren Formel (6) abgeleitet werden.

§ 16. Anwendungen.

Als erste Anwendung der Resultate des vorhergehenden Paragraphen wollen wir die beiden Funktionen $\mathrm{ci}(x)$ und $\mathrm{si}(x)$ in Betracht ziehen und setzen demzufolge in § 15, (9) $\pm ix$ statt x, wo das neue x als *positiv* anzusehen ist; damit erhalten wir die beiden asymptotischen Reihen

$$\mathrm{ci}(x) = a_n(x)\cos x - b_n(x)\sin(x) + R_n, \tag{1}$$

$$\mathrm{si}(x) = a_n(x)\sin(x) + b_n(x)\cos x + R_n, \tag{2}$$

wo der Kürze halber

$$a_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s(2s)!}{x^{2s+1}},\quad b_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-2}{2}} \frac{(-1)^s(2s+1)!}{x^{2s+2}} \tag{3}$$

gesetzt worden ist; für die Restglieder finden wir aus § 9, (8) bis (11)

$$|R_n| < \frac{n!}{x^{n+1}},\quad |R_n'| < \frac{n!}{x^{n+1}}, \tag{4}$$

während § 15, (9) größere Majorantwerte liefert.

Aus (1) und (2) finden wir daher ohne weiteres die beiden Grenzwerte, indem $\varrho < 1$ vorausgesetzt wird,

$$\lim_{x=+\infty}(x^\varrho \cdot \mathrm{ci}(x)) = 0,\quad \lim_{x=+\infty}(x^\varrho \cdot \mathrm{ci}(x)) = 0, \tag{5}$$

während die Formeln § 3, (5), (7) unter Anwendung von (5)

$$\lim_{x=-\infty} \mathrm{ci}(x) = \pm \pi i,\quad \lim_{x=-\infty} \mathrm{si}(x) = -\pi \tag{6}$$

ergeben.

Die beiden letzten Resultate stimmen mit den Integralformeln § 8, (6), (7) vollkommen überein, wenn im ersten Integrale, für negative x, der Punkt $t = 0$ durch einen kleinen Halbkreis umgangen wird.

Setzen wir in ähnlicher Weise in § 15, (10) $\pm ix^2$ statt x, wo das neue x wieder *positiv* angenommen werden muß, so finden wir die Entwicklungen

$$C(x) = b_n'(x)\cos(x^2) - a_n'(x)\sin(x^2) + R_n \tag{7}$$

$$S(x) = a_n'(x)\cos(x^2) + b_n'(x)\sin(x^2) + R_n', \tag{8}$$

in denen der Kürze halber

$$(9)\qquad a_n'(x)=\sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}}\frac{(-1)^s\Gamma(2s+\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}\cdot x^{4s+1}},\quad b_n'(x)=\sum_{s=0}^{\leq\frac{n-2}{2}}\frac{(-1)^s\Gamma(2s+\frac{3}{2})}{2\sqrt{\pi}\cdot x^{4s+3}}$$

gesetzt worden sind, und in denen vermöge § 9, (12) bis (15)

$$(10)\qquad |R_n|<\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}\cdot x^{2n+1}},\quad |R_n'|<\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}\cdot x^{2n+1}}$$

angenommen werden darf.

Es ergeben sich hier die Grenzwerte

$$(11)\qquad \lim_{x=+\infty}(x^\varrho\cdot C(x))=0,\quad \lim_{x=+\infty}(x^\varrho\cdot S(x))=0,$$

in denen $\varrho<1$ vorausgesetzt werden muß, und

$$(12)\qquad \lim_{x=-\infty}C(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad \lim_{x=-\infty}S(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Als eine weitere Anwendung der in § 15 entwickelten asymptotischen Reihen wollen wir noch die Konvergenz eines von Bessel betrachteten Produktes in aller Strenge beweisen.

Setzen wir der Kürze halber

$$(13)\qquad F(x)=\mathrm{li}_1(e^x)-\mathrm{li}(e^{-x})=2x\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{x^{2s}}{(2s+1)!\,(2s+1)},$$

so hat Bessel[1]) diese Verallgemeinerung des Produktes von Wallis

$$(14)\qquad \prod_{s=1}^{s=\infty}\frac{F(2sx)\cdot F(2sx)}{F((2s-1)x)\cdot F((2s+1)x)}=\frac{\pi\cdot F(x)}{4x}$$

angegeben, allein sein Beweis ist ohne alle Strenge, weil er zum wiederholten Male divergente Reihen benutzt.

Wir denken uns natürlich, daß x so gewählt wird, daß keine der Funktionen $F(nx)$ für willkürliche positive ganze n Null wird; dann ergibt eine Anwendung der Reihenentwicklung § 15, (9) für ein sehr großes n eine Darstellung von dieser Form

$$(15)\qquad F(nx)=e^{\pm nx}\left(\frac{1}{nx}+\frac{1}{n^2x^2}+\frac{k_n}{n^3x^3}\right)$$

wo $\pm x$ so zu wählen ist, daß $\Re(\pm x)>0$ wird, und wo $|k_n|$ stets endlich bleibt, wie groß auch n angenommen wird.

Aus (14) finden wir aber ohne Mühe

$$(16)\qquad \log\frac{F(nx)}{F((n-1)x)}=\pm x+\log\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{l_n}{n^2},$$

1) Abhandlungen Bd. II, p. 340.

wo l_n dieselbe Eigenschaft wie früher k_n besitzt; setzen wir noch in (16) $n+1$ statt n, so gibt die Subtraktion der beiden so erhaltenen Formeln eine Entwicklung von dieser Form

$$(17) \qquad \log \frac{F(nx)\cdot F(nx)}{F((n-1)x)\cdot F((n+1)x)} = \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{l_n'}{n^2},$$

wo l_n' hinwiederum dieselbe Eigenschaft als k_n in (15) hat; aus (17) geht aber die unbedingte Konvergenz des Produktes linker Hand in (14) hervor.

Was die Formel (14) betrifft, so können wir hier nicht näher auf dieselbe eingehen, bemerken aber vorübergehend, daß sie wahrscheinlich falsch ist.

§ 17. Kettenbrüche von Laplace, Soldner und Legendre.

Verschiedene Autoren haben eine merkwürdige Anwendung der asymptotischen Reihen des § 15 gemacht, indem sie durch Umschreibungen dieser *divergenten* Entwicklungen *konvergente* Kettenbrüche hergeleitet haben. Es ist dies also ein ähnliches Verfahren, wie dasjenige, welches uns aus einer divergierenden (asymptotischen) Reihe eine *konvergente* Fakultätenreihe liefert, wie ich dies in meinem Handbuch der Theorie der Gammafunktion Kapitel XX auseinandergesetzt habe.

Die Ursache der Entstehung dieser Kettenbrüche durch formale Umschreibungen divergenter Reihen ist in einem allgemeinen Satze, welchen wir nun vorausschicken wollen, zu suchen; es wird sich dann zeigen, daß alle die obenerwähnten Kettenbruchentwicklungen als Spezialfälle eines einzigen allgemeinen Kettenbruches hergeleitet werden können.

Der eben genannte Satz lautet wie folgt:

Wendet man auf die stets divergierende (unendliche) hypergeometrische Reihe

$$(1) \qquad \lim_{k=\infty} F\left(\varrho, \nu, k, -\frac{x}{k}\right)$$

die Methode von Gauß[1]) *zur Entwicklung in Kettenbrüche ganz formell an, so kommt ein Kettenbruch, der sicher für positive x und reelle ν und ϱ konvergiert.*

Um diesen Satz zu beweisen, bemerken wir zuerst, daß die Reihe (1) durch ein bestimmtes Integral von der Form

1) Comment. Götting. Bd. II, p. 13 ff; 1812. Werke Bd. III, p. 134 ff.

$$(2) \qquad U^{\nu,\varrho}(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx} t^{\nu-1}}{(1+t)^\varrho}\, dt, \quad \Re(x) > 0, \ \Re(\nu) > 0$$

dargestellt werden kann, so daß die Reihe, von einem einfachen Faktor abgesehen, das Integral asymptotisch darstellt.

Setzen wir nämlich

$$(1+t)^{-\varrho} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{-\varrho}{s} t^s + R_n,$$

so erhalten wir die asymptotische Reihe[1])

$$(3) \qquad x^\nu \cdot U^{\nu,\varrho}(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\binom{-\varrho}{s}\Gamma(\nu+\varrho)}{x^s} + R_n',$$

welche sich ja leicht in (1) überführen läßt.

Setzen wir nun in (2) $\nu+1$ statt ν, so gibt eine partielle Integration leicht diese erste Fundamentalgleichung

$$(4) \qquad x \cdot U^{\nu+1,\varrho}(x) = \nu \cdot U^{\nu,\varrho}(x) - \varrho \cdot U^{\nu+1,\varrho+1}(x),$$

aus der nach einer einfachen Umformung folgt:

$$(5) \qquad \left\{ \quad \frac{U^{\nu+1,\varrho}(x)}{U^{\nu,\varrho}(x)} = \cfrac{\nu}{x + \cfrac{\varrho}{\left(\cfrac{U^{\nu+1,\varrho}(x)}{U^{\nu+1,\varrho+1}(x)}\right)}}. \right.$$

Weiter ergibt die offenbare Identität

$$t^{\nu+1}(1+t)^{-\varrho-1} = t^\nu(1+t)^{-\varrho} - t^\nu(1+t)^{-\varrho-1}$$

gemäß (2) diese andere Fundamentalgleichung

$$(6) \qquad U^{\nu+2,\varrho+1}(x) = U^{\nu+1,\varrho}(x) - U^{\nu+1,\varrho+1}(x),$$

und somit folgt aus (5) die Kettenbruchentwicklung

$$(7) \qquad \left\{ \quad \frac{U^{\nu+1,\varrho}(x)}{U^{\nu,\varrho}(x)} = \cfrac{\nu}{x + \cfrac{\varrho}{1 + \cfrac{U^{\nu+2,\varrho+1}(x)}{U^{\nu+1,\varrho+1}(x)}}}, \right.$$

woraus sich unmittelbar die formale Entwicklung des entsprechenden Gaußschen Kettenbruchs ergibt.

---

1) Man vergleiche meine Abhandlung Sur une intégrale définie in Math. Annalen Bd. 59, p. 92; 1904.

Werden nun aber x als positiv, ν und ϱ als reell vorausgesetzt, so werden die Zähler und Nenner im Kettenbruche (7) von einem gewissen Stellenzeiger an sämtlich positiv, und dasselbe gilt für das komplementäre Glied

$$U^{\nu+n+1,\varrho+n}(x) : U^{\nu+n,\varrho+n}(x),$$

weil das Integral U für solche Werte seiner Parameter x, ν und ϱ positiv sein muß. Damit ist aber unser Satz bewiesen.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen setzen wir nunmehr in (2) $\varrho = 1$, dann erhalten wir wegen der Formel von Mellin § 8, (12)

$$U^{\nu,1}(x) = e^x \Gamma(\nu) Q(x, 1-\nu), \tag{8}$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\frac{U^{\nu,1}(x)}{U^{\nu-1,1}(x)} = \frac{e^x \Gamma(\nu) Q(x,1-\nu)}{e^x \Gamma(\nu-1) Q(x,2-\nu)} = \frac{(\nu-1) Q(x,1-\nu)}{Q(x,2-\nu)};$$

eine Anwendung der Differenzengleichung § 2, (2) liefert dann ohne weiteres den anderen Ausdruck

$$\frac{U^{\nu,1}(x)}{U^{\nu-1,1}(x)} = -1 + \frac{e^{-x} x^{1-\nu}}{Q(x,1-\nu)};$$

führt man nun diesen Wert in (7) ein, so resultiert der Kettenbruch

$$Q(x,\nu) = \cfrac{e^{-x}x^{\nu}}{x + \cfrac{1-\nu}{1 + \cfrac{1}{x + \cfrac{2-\nu}{1 + \cfrac{2}{x + \cfrac{3-\nu}{1 + \ddots}}}}}}, \tag{9}$$

der in etwas anderer Form von Legendre[1]) gefunden worden ist.

Aus (9) finden wir dann für $\nu = 0$ den Kettenbruch, welchen Soldner[2]) formell entwickelt hat, nämlich:

---

1) Traité des fonct. ellipt. et des intégrales eulériennes Bd. II, p. 509; Paris 1826.

2) Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante, p. p. 17, 23; München 1809.

$$(10)\qquad -e^x \operatorname{li}(e^{-x}) = \cfrac{\frac{1}{x}}{1+\cfrac{\frac{1}{x}}{1+\cfrac{\frac{1}{x}}{1+\cfrac{\frac{2}{x}}{1+\cfrac{\frac{2}{x}}{1+\cfrac{\frac{3}{x}}{1+\ddots}}}}}}}.$$

Setzen wir weiter in (9) $\nu = \frac{1}{2}$ und x^2 statt x, so ergibt sich der folgende Kettenbruch für die Krampsche Transzendente:

$$(11)\qquad e^{x^2} L(x) = \cfrac{\frac{1}{2x}}{1+\cfrac{\frac{1}{2x^2}}{1+\cfrac{\frac{2}{2x^2}}{1+\cfrac{\frac{3}{2x^2}}{1+\cfrac{\frac{4}{2x^2}}{1+\ddots}}}}},$$

der formell von Laplace[1]) angegeben, aber zuerst in aller Strenge von Jacobi[2]) bewiesen worden ist.

Wenn Soldner die Analogie seines Kettenbruchs mit dem von Laplace hervorhebt, so geschieht dies mit vollem Recht; denn wie wir gesehen haben, entfließen diese beiden Kettenbrüche aus dem Legendreschen nur bei verschiedener Spezialisierung des Parameters ν.

§ 18. Die Annäherungsbrüche des Legendreschen Kettenbruchs.

Wir haben nun die Annäherungsbrüche des Legendreschen Kettenbruchs, oder vielmehr des folgenden

1) Mécanique céleste livre X; Bd. IV.

2) Journal für Mathematik Bd. 12, p. 346; 1834.

$$(1)\qquad \frac{e^{-x}x^{\nu-1}}{Q(x,\nu)} = 1 + \cfrac{\frac{1-\nu}{x}}{1 + \cfrac{\frac{1}{x}}{1 + \cfrac{\frac{2-\nu}{x}}{1 + \cfrac{\frac{2}{x}}{1 + \ddots}}}}$$

näher zu untersuchen; bezeichnen wir mit

$$(2)\qquad \frac{f_0\left(\frac{1}{x}\right)}{g_0\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad \frac{f_1\left(\frac{1}{x}\right)}{g_1\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad \frac{f_2\left(\frac{1}{x}\right)}{g_2\left(\frac{1}{x}\right)}, \cdots\cdots$$

diese Annäherungsbrüche, so finden wir direkt

$$(3)\qquad f_0\left(\frac{1}{x}\right) = 1, \quad f_1\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1-\nu}{x}$$

$$(4)\qquad g_0\left(\frac{1}{x}\right) = 1, \quad g_1\left(\frac{1}{x}\right) = 1,$$

während die folgenden Zähler und Nenner sich unter Anwendung der Rekursionsformeln

$$(5)\qquad F_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) = F_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{n}{x} \cdot F_{2n-2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(6)\qquad F_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right) = F_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{n+1-\nu}{x} \cdot F_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

nach und nach berechnen lassen; in (5) und (6) ist sowohl $F_n = f_n$ als $F_n = g_n$ zu setzen.

Durch vollständige Induktion finden wir demnach aus (5) und (6) für die f_n diese allgemein giltigen Ausdrücke:

$$(7)\qquad f_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \sum_{s=1}^{s=n} \binom{n}{s} \cdot \frac{(n+1-\nu)(n-\nu)\cdots(n-s+2-\nu)}{x^s}$$

$$(8)\qquad f_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \sum_{s=1}^{s=n+1} \binom{n+1}{s} \cdot \frac{(n+1-\nu)(n-\nu)\cdots(n-s+2-\nu)}{x^s};$$

die letzte dieser Formeln ist für $\nu = 0$ in etwas anderer Form von Laguerre[1]) angegeben worden.

---

1) Werke Bd. I, p. 430.

Was die Nenner g_n betrifft, so ist es sicher nicht möglich, ihre allgemein giltigen Ausdrücke in einfacher Form darzustellen; Soldner[1]) hat für $\nu = 0$ die zwölf ersten dieser Polynome ausgerechnet. Durch vollständige Induktion folgt aus (4), (5) und (6), daß die Polynome g_{2n} und g_{2n+1} beide vom n^{ten} Grade in $1:x$ sein müssen.

Wir erwähnen hier noch, daß die Formeln (5) und (6) auch auf die Form

$$(9)\quad F_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(1 + \frac{2n-\nu}{x}\right) \cdot F_{2n-2}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{(n-1)(n-\nu)}{x^2} \cdot F_{2n-4}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(10)\quad F_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(1 + \frac{2n+1-\nu}{x}\right) \cdot F_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{n(n-\nu)}{x^2} \cdot F_{2n-3}\left(\frac{1}{x}\right)$$

gebracht werden können; um dies einzusehen haben wir in der Tat nur in (5) unter Anwendung von (6) die Funktion mit ungeradem Stellenzeiger, und in (6) unter Anwendung von (5) die Funktion mit geradem Stellenzeiger zu eliminieren; eine Wiederholung desselben Verfahrens mit den beiden so erhaltenen Formeln ergibt dann unmittelbar die gesuchten Formeln (9) und (10).

§ 19. Verallgemeinerungen der Kettenbrüche von Laguerre und Tannery.

Die Rekursionsformeln § 18, (9), (10), welche wir soeben entwickelt haben, sind in der Tat höchst merkwürdig; setzen wir nämlich

$$(1)\quad x^n \cdot g_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi_{n+1}(x), \quad x^{n+1} \cdot f_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right) = \psi_{n+1}(x),$$

so ist offenbar

$$(2)\quad \frac{\frac{1}{x} \cdot g_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)}{f_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\varphi_{n+1}(x)}{\psi_{n+1}(x)},$$

woraus sich unter Anwendung von § 18, (1) der folgende Grenzwert ergibt:

$$(3)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)} = e^x x^{-\nu} Q(x,\nu).$$

Führt man nun die Definitionen (1) in § 18, (10) ein, so entfließen die beiden anderen Rekursionsformeln

$$(4)\quad \varphi_{n+1}(x) = (x + 2n + 1 - \nu) \cdot \varphi_n(x) - n(n-\nu) \cdot \varphi_{n-1}(x)$$

$$(5)\quad \psi_{n+1}(x) = (x + 2n + 1 - \nu) \cdot \psi_n(x) - n(n-\nu) \cdot \psi_{n-1}(x);$$

1) Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante, p. p. 24, 25; München 1809.

aus den drei letzten Formeln läßt sich aber ohne weiteres die Kettenbruchentwicklung ableiten:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} Q(x,\nu) = \dfrac{e^{-x}x^{\nu}}{x+1-\nu-\dfrac{1\cdot(1-\nu)}{x+3-\nu-\dfrac{2\cdot(2-\nu)}{x+5-\nu-\dfrac{3\cdot(3-\nu)}{x+7-\nu-\cdots}}}} \end{array}\right.,$$

die also sicher für reelle ν und positive x konvergiert.

In dieser Allgemeinheit scheint die Formel (6) neu zu sein; für $x = 1$ ergibt sich der von J. Tannery[1]) in ganz anderer Weise für $Q(1, \nu)$ hergeleitete Kettenbruch, während die Annahme $\nu = 0$ den von Laguerre[2]) gefundenen Kettenbruch für den Integrallogarithmus liefert.

Setzen wir noch in (6) $\nu = \frac{1}{2}$ und x^2 statt x, so folgt für die Funktion $L(x)$ diejenige Entwicklung, welche Laguerre[3]) erwähnt hat; seine Behauptung über die Analogie der beiden für $\mathrm{li}\,(e^{-x})$ und $L(x)$ so erhaltenen Kettenbrüche ist demnach vollkommen richtig; denn wie unsere Herleitung zeigt, sind diese Entwicklungen nur Spezialfälle derselben allgemeineren.

Natürlich läßt sich in ganz ähnlicher Weise die Formel § 18, (9) anwenden; setzen wir nämlich hier

$$(7)\qquad x^n \cdot g_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi_n(x), \quad x^{n+1} \cdot f_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) = \psi_n(x),$$

so ist auch

$$(8)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)} = e^x \cdot x^{-\nu} \cdot Q(x,\nu),$$

während aus § 18, (9) die beiden Rekursionsformeln

$$(9)\quad \varphi_n(x) = (x + 2n - \nu)\cdot\varphi_{n-1}(x) - (n-1)(n-\nu)\cdot\varphi_{n-2}(x)$$

$$(10)\quad \psi_n(x) = (x + 2n - \nu)\cdot\psi_{n-1}(x) - (n-1)(n-\nu)\cdot\psi_{n-2}(x)$$

folgen, und somit ergibt sich der Kettenbruch

---

1) Comptes rendus, Bd. 94, p. 1698—1701, Bd. 95, p. 75; 1882.
2) Werke Bd. I, p. 431.
3) Werke Bd. I, p. 433.

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{l} Q(x,\nu) = \cfrac{e^{-x}x^{\nu}}{x+\cfrac{(1-\nu)x}{x+1-\cfrac{1\cdot(2-\nu)}{x+2-\nu-\cfrac{2\cdot(3-\nu)}{x+4-\nu-\cfrac{3\cdot(4-\nu)}{x-6-\nu-\ddots}}}}} \end{array} \right.,$$

der neu zu sein scheint; natürlich kann man dieselben Spezialisierungen von (11) wie früher von (6) unmittelbar erhalten.

Kapitel IV.

Bestimmte Integrale.

§ 20. Integrale mit der Exponentialfunktion.

Die asymptotischen Reihen, welche wir in § 15 entwickelt haben, gestatten uns eine einfache Ermittelung einer großen Anzahl bestimmter Integrale, in welchen die Funktion $Q(x,\nu)$ eine ähnliche Rolle wie die Exponentialfunktion in verschiedenen elementaren Integralen spielt.

Aus der Differentialgleichung

$$(1)\qquad D_x Q(\alpha x,\nu) = -\alpha^{\nu}x^{\nu-1}e^{-\alpha x}$$

folgt durch partielle Integration

$$(2)\qquad \int e^{-\alpha x}Q(\beta x,\nu)dx = -\frac{e^{-\alpha x}Q(\beta x,\nu)}{\alpha} + \frac{\beta^{\nu}Q(\alpha x+\beta x,\nu)}{\alpha(\alpha+\beta)^{\nu}},$$

wo die Integrationskonstante weggelassen ist; lassen wir demnach in (2) $|x|$ über jede Grenze hinauswachsen, so müssen wir $\Re(\alpha+\beta)>0$ oder auch speziell $\Re(\alpha+\beta)=0$ und $\Re(\nu)>0$ annehmen; wir finden dann unmittelbar die Formel

$$(3)\qquad \int_x^{\infty} e^{-\alpha t}Q(\beta t,\nu)dt = \frac{e^{-\alpha x}Q(\beta x,\nu)}{\alpha} - \frac{\beta^{\nu}Q(\alpha x+\beta x,\nu)}{\alpha(\alpha+\beta)^{\nu}},$$

wo der sehr entfernte Teil des Integrationswegs mit der Achse der positiven Zahlen zusammenfällt.

Da nun für $\Re(\nu) > 0$ die Definition der Funktion $Q(x, \nu)$ § 1, (2) die Formel

$$Q(0, \nu) = \Gamma(\nu), \quad \Re(\nu) > 0 \tag{4}$$

liefert, so entfließt aus (3) das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} Q(\beta t, \nu)\, dt = \frac{\Gamma(\nu)}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta^\nu}{(\alpha+\beta)^\nu}\right), \quad \Re(\nu) > -1; \tag{5}$$

denn aus der Differentialgleichung (1) folgt für $\Re(\nu) \leqq 0$ einem bekannten Satze[1]) gemäß

$$\lim_{|x|=0} \left| x^{-\nu+\sigma} \cdot Q(\beta x, \nu) \right| = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}, \tag{6}$$

je nachdem $\sigma \gtrless 0$ angenommen wird, und die Formel (6) bleibt richtig, wie klein auch $|\sigma|$ angenommen wird, wenn nur diese Größe eine angebbare ist.

In (5) ist also entweder $\Re(\alpha + \beta) > 0$, $\Re(\nu) > -1$ oder speziell $\Re(\alpha + \beta) = 0$, $\Re(\nu) > 0$ anzunehmen.

Setzen wir in (3) und (5) $\nu = 0$, so entfließen die beiden spezielleren Formeln

$$\int_x^\infty e^{-\alpha t} \operatorname{li}(e^{-\beta t})\, dt = \frac{e^{-\alpha x} \operatorname{li}(e^{-\beta x})}{\alpha} - \frac{\operatorname{li}(e^{-\alpha x - \beta x})}{\alpha}. \tag{7}$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \operatorname{li}(e^{-\beta t})\, dt = -\frac{1}{\alpha} \cdot \log\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right), \tag{8}$$

in denen demnach $\Re(\alpha + \beta) \geqq 0$ aber $\alpha + \beta$ von Null verschieden angenommen werden müssen; die Formel (8) war schon Schlömilch[2]) bekannt.

Aus (8) finden wir dann ohne weiteres die beiden Integraldarstellungen

$$\int_0^\infty \cos(\alpha t) \operatorname{li}(e^{-\beta t})\, dt = -\frac{1}{\alpha} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \tag{9}$$

$$\int_0^\infty \sin(\alpha t) \operatorname{li}(e^{-\beta t})\, dt = -\frac{1}{\alpha} \cdot \log\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \tag{10}$$

---

1) U. Dini: Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer reellen veränderlichen Größe, p. 104; Leipzig 1892. B. G. Teubner.

2) Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, p. p. 74, 75; Jena 1843.

wo $\Re(\beta \pm i\alpha) \geqq 0$ vorauszusetzen ist, und in ähnlicher Weise die beiden anderen Formeln

$$(11) \qquad \int_0^\infty e^{-\alpha t} \operatorname{ci}(\beta t)\, dt = -\frac{1}{\alpha} \cdot \log\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$$

$$(12) \qquad \int_0^\infty e^{-\alpha t} \operatorname{si}(\beta t)\, dt = -\frac{1}{\alpha} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right),$$

in denen $\Re(\alpha \pm i\beta) \geqq 0$ angenommen werden muß; die beiden Formeln (9) und (10) verdanken wir auch Schlömilch.[1])

Kehren wir nun zu den Formeln (3) und (5) zurück, so gibt die Annahme $\nu = \frac{1}{2}$ nach einer leichten Änderung der Bezeichnungen die beiden spezielleren Formeln

$$(13) \qquad \int_x^\infty e^{-\alpha^2\beta} L(\beta t)\, dt = \frac{e^{-\alpha^2 x^2} L(\alpha x)}{2\alpha^2} - \frac{(\beta L\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 x^2})}{2\alpha^2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$(14) \qquad \int_0^\infty e^{-\alpha^2\beta} L(\beta t)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^2}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right).$$

§ 21. Diskontinuierliche Integrale.

Die partielle Integration liefert noch unter Anwendung gewisser elementarer trigonometrischer Identitäten die folgenden Integralformeln:

$$(1) \int \cos(\alpha x) \operatorname{ci}(\beta x)\, dx = \frac{\sin(\alpha x) \operatorname{ci}(\beta x)}{\alpha} - \frac{\operatorname{si}(\alpha x + \beta x) + \operatorname{si}(\alpha x - \beta x)}{2\alpha}$$

$$(2) \int \sin(\alpha x) \operatorname{ci}(\beta x)\, dx = -\frac{\cos(\alpha x) \operatorname{ci}(\beta x)}{\alpha} + \frac{\operatorname{ci}(\alpha x + \beta x) + \operatorname{ci}(\alpha x - \beta x)}{2\alpha}$$

$$(3) \int \cos(\alpha x) \operatorname{si}(\beta x)\, dx = \frac{\sin(\alpha x) \operatorname{si}(\beta x)}{\alpha} + \frac{\operatorname{ci}(\alpha x + \beta x) - \operatorname{ci}(\alpha x - \beta x)}{2\alpha}$$

$$(4) \int \sin(\alpha x) \operatorname{si}(\beta x)\, dx = -\frac{\cos(\alpha x) \operatorname{si}(\beta x)}{\alpha} + \frac{\operatorname{si}(\alpha x + \beta x) - \operatorname{si}(\alpha x - \beta x)}{2\alpha}$$

In (2) und (3) dürfen wir nicht $\alpha = \beta$ annehmen; wir finden aber in diesem Falle ganz in derselben Weise die spezielleren Formeln

$$(5) \qquad \int \sin x \operatorname{ci}(x)\, dx = -\cos x \operatorname{ci}(x) + \frac{\operatorname{ci}(2x) + \log x}{2}$$

---

[1]) Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, p. p. 74, 75; Jena 1843.

$$(6)\qquad \int \cos x \,\mathrm{si}(x)\,dx = \sin x \,\mathrm{si}(x) + \frac{\mathrm{ci}(2x) - \log x}{2}.$$

In (5) und (6) darf offenbar x nicht über jede Grenze hinauswachsen; dies ist aber in den vier vorhergehenden Formeln wohl erlaubt. Um dies zu erreichen, haben wir die beiden Grenzwerte § 16, (6) in Betracht zu ziehen; es zeigt sich dann, daß die so erhaltenen bestimmten Integrale mit den Grenzen 0 und ∞ sämtlich *diskontinuierlich* sein müssen; wir finden in der Tat aus (1) und (4):

$$(7)\qquad \int_0^\infty \cos(\alpha x)\,\mathrm{ci}(\beta x)\,dx = \begin{cases} -\frac{\pi}{2\alpha} \\ 0 \end{cases}$$

$$(8)\qquad \int_0^\infty \sin(\alpha x)\,\mathrm{si}(\beta x)\,dx = \begin{cases} -\frac{\pi}{2\alpha}, \\ 0 \end{cases}$$

je nachdem $\alpha \gtrless \beta$ vorausgesetzt wird; aus (2) und (3) ergibt sich in ähnlicher Weise

$$(9)\qquad \int_0^\infty \sin(\alpha x)\,\mathrm{ci}(\beta x)\,dx = -\frac{1}{2\alpha} \cdot \log\left|\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 1\right|$$

$$(10)\qquad \int_0^\infty \cos(\alpha x)\,\mathrm{si}(\beta x)\,dx = -\frac{1}{2\alpha} \cdot \log\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|,$$

wo die absoluten Werte deutlich die Diskontinuität zeigen.

Es liegt auf der Hand, daß in den vier letzten Formeln α und β beide als *positiv* anzusehen sind.

In (9) und (10) darf, wie schon bemerkt, nicht $\alpha = \beta$ gesetzt werden; dies ist aber wohl in (7) und (9) erlaubt; die so erhaltenen Integrale werden einander gleich; es ist nämlich

$$(11)\qquad \int_0^\infty \cos x \,\mathrm{ci}(x)\,dx = \int_0^\infty \sin x \,\mathrm{si}(x)\,dx = -\frac{\pi}{4}.$$

In ganz ähnlicher Weise finden wir die folgenden unbestimmten Integrale

$$(12)\qquad \int \cos(\alpha x)\,C(\sqrt{\beta x})\,dx = \frac{\sin(\alpha x)\,C(\sqrt{\beta x})}{\alpha} - \frac{\sqrt{\beta}}{2\alpha}\left(\frac{S(\sqrt{\alpha x+\beta x})}{\sqrt{\alpha+\beta}} + \frac{S(\sqrt{\alpha x-\beta x})}{\sqrt{\alpha-\beta}}\right)$$

$$(13)\qquad \int \sin(\alpha x)\,C(\sqrt{\beta x})\,dx = -\frac{\cos(\alpha x)\,C(\sqrt{\beta x})}{\alpha} + \frac{\sqrt{\beta}}{2\alpha}\left(\frac{C(\sqrt{\alpha x+\beta x})}{\sqrt{\alpha+\beta}} + \frac{C(\sqrt{\alpha x-\beta x})}{\sqrt{\alpha-\beta}}\right)$$

$$(14)\quad \int \cos(\alpha x)\, S(\sqrt{\beta x})\, dx = \frac{\sin(\alpha x)\, S(\sqrt{\beta x})}{\alpha} - \frac{\sqrt{\beta}}{2\alpha}\left(\frac{C(\sqrt{\alpha x+\beta x})}{\sqrt{\alpha+\beta}} - \frac{C(\sqrt{\alpha x-\beta x})}{\sqrt{\alpha-\beta}}\right)$$

$$(15)\quad \int \sin(\alpha x)\, S(\sqrt{\beta x})\, dx = -\frac{\cos(\alpha x)\, S(\sqrt{\beta x})}{\alpha} + \frac{\sqrt{\beta}}{2\alpha}\left(\frac{S(\sqrt{\alpha x+\beta x})}{\sqrt{\alpha+\beta}} - \frac{S(\sqrt{\alpha x-\beta x})}{\sqrt{\alpha-\beta}}\right),$$

in denen α von β verschieden sein muß; für $\alpha = \beta$ verschwindet die letzte Funktion S in (12) und (15), während in (13) und (14) das letzte Glied in den Parenthesen durch $\sqrt{x}$ zu ersetzen ist.

Aus diesen Formeln ergeben sich nun ohne Mühe die entsprechenden bestimmten Integrale mit den Grenzen 0 und ∞; es leuchtet ein, unter Zuhilfenahme der Formeln § 16, (12), daß die vier so erhaltenen bestimmten Integrale sämtlich *diskontinuierlich* sein müssen, da sie verschiedene Werte annehmen je nachdem $\alpha \gtrless \beta$ angenommen wird.

§ 22. Analogien der Integrale der §§ 9 und 14.

Als eine weitere Anwendung der für die Funktionen $\mathrm{li}(e^{-x})$, $\mathrm{ci}(x)$ und $\mathrm{si}(x)$ gefundenen asymptotischen Ausdrücke wollen wir Integralgattungen, welche mit denjenigen in §§ 9 und 14 betrachteten analog sind, näher untersuchen.

Zuerst beweisen wir den folgenden Satz:

Wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet, so ist das bestimmte Integral

$$(1)\qquad J = \int_a^\infty \frac{\mathrm{li}(e^{-tx-\beta x})}{t^{n+1}}\, dt,\quad \Re(x) \geqq 0$$

unter endlicher Form durch Integrallogarithmen ausdrückbar.

Durch partielle Integration finden wir in der Tat

$$(2)\qquad \int_a^\infty \frac{\mathrm{li}(e^{-tx-\beta x})}{t^{n+1}}\, dt = \frac{\mathrm{li}(e^{-ax-\beta x})}{na^n} + \frac{e^{-\beta x}}{n} \cdot \int_a^\infty \frac{e^{-tx}}{t^n(t+\beta)}\, dt;$$

aus der Identität

$$\frac{1}{(t+a)(t+\beta)} = \frac{1}{\beta-a}\left(\frac{1}{t+a} - \frac{1}{t+\beta}\right)$$

entfließt aber durch $(n-1)$-malige Differentiation nach a, wenn $a = 0$ gesetzt wird, die Dekompositionsformel

$$\frac{1}{t^n(t+\beta)} = \frac{(-1)^n}{\beta^n(t+\beta)} + \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^{n-s-1}}{\beta^{n-s-1}\, t^{s+1}};$$

da nun weiter

§ 23. Weitere diskontinuierliche Integrale.

Wir wollen nunmehr den folgenden eigentümlichen Satz, welcher neu zu sein scheint, beweisen:

Die nach x genommenen unbestimmten Integrale der vier Produkte

$$\mathrm{li}(e^{-\alpha x})\mathrm{li}(e^{-\beta x}),\ \mathrm{ci}(\alpha x)\mathrm{ci}(\beta x),\ \mathrm{si}(\alpha x)\mathrm{si}(\beta x),\ \mathrm{ci}(\alpha x)\mathrm{si}(\beta x)$$

sind sämtlich unter endlicher Form durch die drei Transzendenten li, ci *und* si *ausdrückbar.*

Erstens gehen wir von der Formel § 20, (7) aus; dividieren wir dieselbe durch α, so gibt eine Integration nach α, von α bis ∞, das Resultat

$$(1)\quad \int_x^\infty \mathrm{li}(e^{-\alpha t})\mathrm{li}(e^{-\beta t})\,dt = -\mathrm{li}(e^{-\beta x})\cdot\int_\alpha^\infty \frac{e^{-tx}}{t}\,dt + \int_\alpha^\infty \frac{\mathrm{li}(e^{-tx-\beta x})}{t^2}\,dt;$$

das letzte Integral rechter Hand in (1) ist schon in § 22, (4) bestimmt worden; unter Anwendung von § 9, (3) findet sich weiter

$$\int_\alpha^\infty \frac{e^{-tx}}{t^2}\,dt = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} - x\,\mathrm{li}(e^{-\alpha x}),$$

und somit entfließt aus (1) die gesuchte Formel

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\int_x^\infty \mathrm{li}(e^{-\alpha t})\,\mathrm{li}(e^{-\beta t})\,dt = \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\mathrm{li}(e^{-\alpha x-\beta x}) - x\,\mathrm{li}(e^{-\alpha x})\mathrm{li}(e^{-\beta x}) - \\ -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\cdot\mathrm{li}(e^{-\beta x}) - \frac{e^{-\beta x}}{\beta}\cdot\mathrm{li}(e^{-\alpha x}),\end{aligned}\right.$$

in der also $\Re(\alpha+\beta)\geqq 0$ angenommen werden muß.

Für $x=0$ findet sich aus (2) das bestimmte Integral

$$(3)\quad \int_0^\infty \mathrm{li}(e^{-\alpha t})\,\mathrm{li}(e^{-\beta t})\,dt = \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\log(\alpha+\beta) - \frac{\log\beta}{\alpha} - \frac{\log\alpha}{\beta},$$

woraus sich für $\alpha=\beta=1$ die folgende, noch speziellere Formel ergibt:

$$(4)\qquad \int_0^\infty (\mathrm{li}(e^{-t}))^2\,dt = 2\log 2.$$

Um nun auch die zwei nächsten unbestimmten Integrale herzuleiten, gehen wir von § 21, (1) und (4) aus und finden dann in ähnlicher Weise

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}\int \mathrm{ci}(\alpha x)\,\mathrm{ci}(\beta x)\,dx = x\,\mathrm{ci}(\alpha x)\,\mathrm{ci}(\beta x) + \frac{1}{2\alpha}\left(\mathrm{si}(\alpha x+\beta x)+\mathrm{si}(\alpha x-\beta x)\right) + \\ +\frac{1}{2\beta}\left(\mathrm{si}(\alpha x+\beta x)+\mathrm{si}(\beta x-\alpha x)\right) - \frac{\sin(\alpha x)\,\mathrm{ci}(\beta x)}{\alpha} - \frac{\sin(\beta x)\,\mathrm{ci}(\alpha x)}{\beta}\end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}\int \mathrm{si}(\alpha x)\,\mathrm{si}(\beta x)\,dx &= x\,\mathrm{si}(\alpha x)\,\mathrm{si}(\beta x) - \frac{1}{2\beta}\left(\mathrm{si}(\alpha x+\beta x)+\mathrm{si}(\alpha x-\beta x)\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2\alpha}\left(\mathrm{si}(\alpha x+\beta x)+\mathrm{si}(\beta x-\alpha x)\right) + \frac{\cos(\alpha x)\,\mathrm{si}(\beta x)}{\alpha} + \frac{\cos(\beta x)\,\mathrm{si}(\alpha x)}{\beta}.\end{aligned}\right.$$

Es ist dann offenbar, daß die beiden entsprechenden bestimmten Integrale mit den Grenzen 0 und ∞ *diskontinuierlich* sind; es ergibt sich in der Tat wegen § 16, (6)

$$(7)\quad \int_0^\infty \mathrm{ci}(\alpha x)\,\mathrm{ci}(\beta x)\,dx = \begin{cases}\frac{\pi}{2\alpha}\\ \frac{\pi}{2\beta}\end{cases}$$

$$(8)\quad \int_0^\infty \mathrm{si}(\alpha x)\,\mathrm{si}(\beta x)\,dx = \begin{cases}\frac{\pi}{2\alpha},\\ \frac{\pi}{2\beta}\end{cases}$$

je nachdem $\alpha \gtrless \beta$ vorausgesetzt wird; für $\alpha = \beta$ findet sich speziell

$$(9)\quad \int_0^\infty (\mathrm{ci}(x))^2\,dx = \int_0^\infty (\mathrm{si}(x))^2\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Gehen wir endlich von § 21, (2) oder (3) aus, so erhalten wir die vierte und letzte Formel dieser Gattung

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}\int \mathrm{si}(\alpha x)\,\mathrm{ci}(\beta x)\,dx &= x\,\mathrm{si}(\alpha x)\,\mathrm{ci}(\beta x) + \frac{\cos(\alpha x)\,\mathrm{ci}(\beta x)}{\alpha} - \frac{\sin(\beta x)\,\mathrm{si}(\alpha x)}{\beta} - \\ &\quad - \left(\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}\right)\mathrm{ci}(\alpha x+\beta x) - \left(\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2\beta}\right)\mathrm{ci}(\alpha x-\beta x),\end{aligned}\right.$$

und hieraus das bestimmte Integral

$$(11)\quad \int_0^\infty \mathrm{si}(\alpha x)\,\mathrm{ci}(\beta x)\,dx = \frac{\log\beta}{\alpha} - \left(\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}\right)\log(\alpha+\beta) - \left(\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2\beta}\right)\log|\alpha-\beta|,$$

das demnach auch ein *diskontinuierliches* ist; für $\alpha = \beta = 1$ entfließt die speziellere Formel

$$(12)\quad \int_0^\infty \mathrm{ci}(x)\,\mathrm{si}(x)\,dx = -\log 2.$$

§ 24. Das Analogon des zweiten Eulerschen Integrals.

Die partielle Integration liefert noch diese andere Formel

$$(1)\quad \int_x^\infty t^{\varrho-1}\,Q(t,\nu)\,dt = \frac{Q(x,\varrho+\nu) - x^\varrho\,Q(x,\nu)}{\varrho};$$

ist nun $\Re(\nu+\varrho)>0$ $\Re(\varrho)>0$, so darf in (1) $x=0$ angenommen werden, und somit entfließt die speziellere Integralrelation:

$$(2) \qquad \int_0^\infty t^{\varrho-1}Q(t,\nu)dt=\frac{\Gamma(\nu+\varrho)}{\varrho};$$

die Subtraktion von (1) und (2) liefert demnach wegen der Identität

$$\Gamma(\nu+\varrho)=P(x,\nu+\varrho)+Q(x,\nu+\varrho)$$

diese andere Formel

$$(3) \qquad \int_0^x t^{\varrho-1}Q(t,\nu)dt=\frac{P(x,\nu+\varrho)+x^\varrho Q(x,\nu)}{\varrho}.$$

Die Analogie zwischen den drei Formeln, die wir soeben entwickelt haben, und den entsprechenden aus der Theorie der Gammafunktion liegt auf der Hand; bezeichnen wir nämlich durch $\mathfrak{Q}_x(\nu,\varrho)$ und $\mathfrak{P}_x(\nu,\varrho)$ die beiden in (1) und (3) auftretenden Integrale, so ist die $\mathfrak{Q}$-Funktion sicher sowohl in ν als in ϱ eine ganze Transzendente, falls x endlich und von 0 verschieden angenommen wird; weiter ist offenbar

$$(4) \qquad \frac{\Gamma(\nu+\varrho)}{\varrho}=\mathfrak{P}_x(\nu,\varrho)+\mathfrak{Q}_x(\nu,\varrho).$$

Es ist daher sehr interessant, daß diese Teilung des bestimmten Integrals (2) auf keine neue Transzendente führt.

Der Anwendungen wegen schreiben wir vorteilhafter die Formel (2) unter der Form

$$(5) \qquad \int_0^\infty t^{\varrho-1}Q(tx,\nu)dt=\frac{\Gamma(\nu+\varrho)}{\varrho\cdot x^\varrho},\ \Re(x)\geqq 0;$$

differentiieren wir nun diese Formel nach ϱ, so gibt die Annahme $\varrho=1$ die folgende Integraldarstellung:

$$(6) \qquad \int_0^\infty Q(tx,\nu)\log t\,dt=\frac{\Gamma(\nu+1)}{x}(\Psi(\nu+1)-\log x-1),$$

in der $\Psi(x)$ die in § 7, (7) eingeführte logarithmische Ableitung von $\Gamma(x)$ bedeutet.

Für $\nu=0$ finden wir aus (6) die spezielleren Formeln

$$(7) \qquad \int_0^\infty \mathrm{li}(e^{-tx})\cdot t^{\varrho-1}dt=-\frac{\Gamma(\varrho)}{\varrho\cdot x^\varrho}$$

$$(8)\qquad \int_0^\infty \mathrm{ci}(tx)\cdot t^{\varrho-1}dt = -\frac{\Gamma(\varrho)\cos\frac{\pi\varrho}{2}}{\varrho\cdot x^\varrho}$$

$$(9)\qquad \int_0^\infty \mathrm{si}(tx)\cdot t^{\varrho-1}dt = -\frac{\Gamma(\varrho)\sin\frac{\pi\varrho}{2}}{\varrho\cdot x^\varrho},$$

wo überall $\Re(\varrho)>0$ vorauszusetzen ist; in (8) und (9) darf x nur positiv sein, während in (7) $\Re(x)\geqq 0$ anzunehmen ist; die Formel (7) verdanken wir Schlömilch[1]). In (8) und (9) muß noch $\Re(\varrho)<2$ angenommen werden; für $\varrho=1$ verschwindet das Integral in (8).

Aus (6) finden wir in ähnlicher Weise

$$(10)\qquad \int_0^\infty \mathrm{li}(e^{-t})\log t\,dt = \int_0^\infty \mathrm{si}(t)\log t\,dt = C+1$$

$$(11)\qquad \int_0^\infty \mathrm{ci}(t)\log t\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Setzen wir endlich in (6) $\nu=\frac{1}{2}$, so ergibt sich die folgende Formelgruppe:

$$(12)\qquad \int_0^\infty L(tx)t^{2\varrho-1}dt = \frac{\Gamma(\varrho+\frac{1}{2})}{4\varrho\cdot x^{2\varrho}}$$

$$(13)\qquad \int_0^\infty C(tx)t^{2\varrho-1}dt = \frac{\Gamma(\varrho+\frac{1}{2})\cdot\cos\frac{2\varrho+1}{4}\cdot\pi}{\varrho\cdot x^{2\varrho}}$$

$$(14)\qquad \int_0^\infty S(tx)\,t^{2\varrho-1}dt = \frac{\Gamma(\varrho+\frac{1}{2})\cdot\sin\frac{2\varrho+1}{4}\pi}{\varrho\cdot x^{2\varrho}};$$

hierbei ist in (12) $\Re(\varrho)>0$ und $\Re(x^2)>0$, in den beiden anderen Formeln x positiv und $0<\Re(\varrho)<\frac{3}{2}$ anzunehmen; für $\varrho=\frac{1}{2}$ verschwindet das Integral in (13).

Die Analogie der zwei Formelgruppen (7) bis (9) und (12) bis (14) mit einer entsprechenden Formelgruppe aus der Theorie der Gammafunktion[2]) ist vollkommen.

§ 25. Das Analogon des Laplace-Abelschen Integrals.

Wir wollen nunmehr aus den Formeln des vorhergehenden Paragraphen als Analogon des Laplace-Abelschen Integrals den folgenden Satz herleiten:

1) Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, p. 74; Jena 1843.
2) Handbuch der Gammafunktion. p. 152.

Es sei

$$F(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s x^s}{\Gamma(\nu + \varrho + s)} \tag{1}$$

eine solche ganze transzendente Funktion in x, daß der Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{2}$$

eine angebbare Größe ist, dann ist allgemein

$$\int_0^\infty Q(ty, \nu) F(tx) t^{\varrho-1} dt = x^{-\varrho} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s}{\varrho + s} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\varrho+s}, \tag{3}$$

und diese Formel bleibt jedenfalls richtig, wenn gleichzeitig $\Re(y) > 0$ $|x| < r \cdot |y|$ und entweder $\Re(\nu) > 0$, $\Re(\varrho) > 0$ oder $\Re(\nu) < 0$, $\Re(\nu + \varrho) > 0$ angenommen werden.

Um diesen Satz zu beweisen, bemerken wir, daß die unendliche Reihe

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{Q(ty, \nu) a_s x^s t^{\varrho+s-1}}{\Gamma(\nu + \varrho + s)}, \tag{4}$$

unter den oben angegebenen Bedingungen über ν und ϱ, offenbar die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

1. Die Reihe (4) ist im Intervall $0 < t < \infty$ eine gleichmäßig konvergente.

2. Die einzelnen Glieder unserer Reihe sind von $t = 0$ bis $t = \infty$ in t integrabel.

3. Die neue Reihe, welche durch *formale* gliedweise Integration von $t = 0$ bis $t = \infty$ aus (4) erhalten wird, ist nichts anderes als die Reihe rechter Hand in (3) und somit konvergent, falls ϱ weder gleich Null noch einer negativen ganzen Zahl angenommen wird. Ein bekannter Satz[1]) ergibt dann unmittelbar die Formel (3). Wir bemerken noch ausdrücklich, daß der Giltigkeitsbereich der so erhaltenen Formel (3) häufig viel umfassender sein wird, als der der obengenannten allgemeinen.

Als die erste unter den zahlreichen Anwendungen von (3), welche uns auf bekannte Funktionen führen, betrachten wir den einfachsten Fall, wo $a_s = 1$ angenommen wird; unter Zuhilfenahme der Formel § 4, (5) ergibt sich dann unmittelbar für $F(x)$ der Ausdruck

1) U. Dini: Grundlagen, p. 523.

$$F(tx) = \frac{e^{tx} \cdot (tx)^{1-\nu-\varrho} \cdot P(tx, \varrho+\nu-1)}{\Gamma(\nu+\varrho-1)},$$

woraus unter Anwendung von (3) die Integralformel:

$$(4) \quad \int_0^\infty Q(ty,\nu) P(tx, \nu+\varrho-1) e^{tx} t^{-\nu} dt = \frac{\Gamma(\nu+\varrho-1)}{x^{1-\nu}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{\varrho+s} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\varrho+s};$$

setzen wir speziell in (4) $\varrho = 1$, so erhalten wir

$$(5) \quad \int_0^\infty Q(ty,\nu) P(tx,\nu) e^{tx} t^{-\nu} dt = -\frac{\Gamma(\nu)}{x^{1-\nu}} \cdot \log\left(1-\frac{x}{y}\right).$$

Als zweites Beispiel substituieren wir

$$a_s = \frac{(-1)^s \Gamma(\varrho+\nu+s)}{s!},$$

und wir bekommen die folgende Formel:

$$(6) \quad \int_0^\infty e^{-tx} Q(ty,\nu) t^{\varrho-1} dt = x^{-\varrho} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu+\varrho+s)}{s!(\varrho+s)} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\varrho+s},$$

aus welcher eine große Menge anderer hergeleitet werden kann.

Die Annahme $x = 0$ ergibt z. B. die meisten der in § 24 entwickelten bestimmten Integrale, während sich für $\varrho = 1$ verschiedene speziellere Formeln des § 20 wiederfinden.

Wir wollen noch andere Beispiele unserer Formel (6) hier näher betrachten:

1) Setzen wir in (6) $x = y = 1$, $\nu = 1-\varrho$, so folgt nach einer einfachen Änderung der Bezeichnungen

$$(7) \quad - \int_0^\infty e^{-t} Q(t, 1-x) t^{x-1} dt = \beta(x),$$

wo $\beta(x)$ diejenige in § 13, (14) eingeführte Transzendente bedeutet; die Formel (7) ist anwendbar, falls $\Re(x) > 0$ angenommen wird.

2) Die Annahme $x = -1$, $y = +1$ ergibt unter Anwendung der Gaußschen Formel

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

und der Eulerschen Identität

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

diese andere Integraldarstellung

$$(8) \qquad \int_0^\infty e^t Q(t, \nu) t^{\varrho-1} dt = \frac{\pi \Gamma(\varrho)}{\Gamma(1-\nu) \sin \pi(\varrho+\nu)},$$

in der demnach entweder $\Re(\nu) > 0$, $\Re(\varrho) > 0$, $\Re(\varrho+\nu) < 1$ oder $\Re(\nu) < 0$, $0 < \Re(\nu+\varrho) < 1$ angenommen werden muß.

3) Setzen wir endlich in (6) $\varrho = \frac{1}{2}$, $\nu = 0$, so folgt nach einer einfachen Änderung der Bezeichnungen die folgende von Schlömilch[1]) herrührende Formel:

$$(9) \qquad \int_0^\infty e^{x^2} \operatorname{li}(e^{-x}) dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{x} \cdot \operatorname{arc\,sin} x,$$

die für $x = 0$, $x = 1$ interessante numerische Resultate liefert.

§ 26. Bestimmte Integrale mit Zylinderfunktionen.

Es ist sehr bemerkenswert, daß die Analogie der beiden Funktionen $Q(x, \nu)$ und e^{-x} auch auf bestimmte Integrale mit Zylinderfunktionen ausgedehnt werden kann, indem es möglich ist eine Reihe solcher Integrale, welche den altbekannten mit Zylinderfunktionen und der Exponentialfunktion[2]) analog sind, mittels bekannter Funktionen auszudrücken.

Erstens setzen wir in § 25, (3) $1 + \nu$ statt ν und

$$a_s = \frac{(-1)^s}{s!};$$

dann folgt

$$F(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^s}{s! \, \Gamma(\nu+\varrho+s+1)} = x^{-\frac{\nu+\varrho}{2}} \cdot J^{\nu+\varrho}(2\sqrt{x}),$$

und somit finden wir die Integralformel

$$(1) \qquad \int_0^\infty Q(ty, 1+\nu) J^{\nu+\varrho}(2\sqrt{tx}) t^{\frac{\varrho-\nu}{2}-1} dt = x^{\frac{\nu-\varrho}{2}} \cdot P\left(\frac{x}{y}, \varrho\right),$$

in der $P(x, \varrho)$ die zu $Q(x, \varrho)$ komplementäre Funktion bezeichnet; in (1) muß wegen des asymptotischen Ausdruckes für $J^\nu(x)$,[3]) im allgemeinen $\Re(y) > 0$ und entweder $\Re(\nu) > -1$, $\Re(\varrho) > 0$ oder $\Re(\nu) \leqq -1$, $\Re(\nu+\varrho) > -1$, speziell $\Re(y) = 0$, x positiv angenommen werden.

---

1) Beiträge, p. 75.

2) 3) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. p. 185 ff., 156.

Aus (1) folgt für $x = y = 1$ die elegantere Formel

$$(2) \qquad \int_0^\infty Q(t, 1+\nu) J^{\nu+\varrho}(2\sqrt{t})\, t^{\frac{\varrho-\nu}{2}-1}\, dt = P(\varrho),$$

während die Annahme $\varrho = 1$ nach einer leichten Änderung der Bezeichnungen wegen § 2, (10) die Integraldarstellung

$$(3) \qquad \int_0^\infty Q(ty, \nu) J^{\nu}(2\sqrt{tx})\, t^{-\frac{\nu}{2}}\, dt = x^{\frac{\nu}{2}-1}\left(1 - e^{-\frac{x}{y}}\right)$$

liefert, woraus sich für $\nu = 0$ die spezielleren Formeln ergeben:

$$(4) \qquad \int_0^\infty \mathrm{li}\,(e^{-t}) J^0(2\sqrt{tx})\, dt = \frac{e^{-x}-1}{x}$$

$$(5) \qquad \int_0^\infty \mathrm{ci}\,(t) J^0(2\sqrt{tx})\, dt = \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$(6) \qquad \int_0^\infty \mathrm{si}\,(t) J^0(2\sqrt{tx})\, dt = -\frac{\sin x}{x};$$

in den beiden letzten Formeln darf x nur als *positiv* angesehen werden.

Aus der Reihendefinition der Zylinderfunktion $J^\nu(x)$ finden wir durch gliedweise Integration die Formel

$$\int_0^x J^0(2\sqrt{tx})\, dt = \sqrt{\frac{x}{t}} \cdot J^1(2\sqrt{tx}),$$

und somit erhalten wir wegen (4), (5) und (6) die drei ähnlichen Formeln:

$$(7) \qquad \int_0^\infty \mathrm{li}\,(e^{-t}) J^1(2\sqrt{tx})\, \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\mathrm{li}\,(e^{-x}) - C - \log x}{\sqrt{x}}$$

$$(8) \qquad \int_0^\infty \mathrm{ci}\,(t) J^1(2\sqrt{tx})\, \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\mathrm{ci}\,(x) - C - \log x}{\sqrt{x}}$$

$$(9) \qquad \int_0^\infty \mathrm{si}\,(t) J^1(2\sqrt{tx})\, \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{\frac{\pi}{2} - \mathrm{si}\,(x)}{\sqrt{x}}.$$

Setzen wir in (3) $\nu = \frac{1}{2}$, so ergibt eine Anwendung der Formel

$$J^{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x$$

diese andere Formelgruppe

$$\int_0^\infty L(t) \sin(2tx)\,dt = \frac{1 - e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \tag{10}$$

$$\int_0^\infty C(t) \sin(2tx)\,dt = -\frac{2 \sin\frac{\pi}{8} \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x\sqrt{\pi}} \tag{11}$$

$$\int_0^\infty S(t) \sin(2tx)\,dt = -\frac{2 \cos\frac{\pi}{8} \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x\sqrt{\pi}}, \tag{12}$$

wo x als eine *positive* Größe anzusehen ist; eine Integration nach x von x bis ∞ liefert dann ohne weiteres die drei ähnlichen Formeln:

$$\int_0^\infty L(t)\,\mathrm{si}(2tx)\,dt = \frac{1 - e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot L(x) \tag{13}$$

$$\int_0^\infty C(t)\,\mathrm{si}(2tx)\,dt = \frac{\sqrt{8} \sin\frac{\pi}{8}}{\sqrt{\pi}} \cdot S(x\sqrt{2}) \tag{14}$$

$$\int_0^\infty S(t)\,\mathrm{si}(2tx)\,dt = \frac{\sqrt{8} \cos\frac{\pi}{8}}{\sqrt{\pi}} \cdot S(x\sqrt{2}). \tag{15}$$

Als zweites Beispiel setzen wir in § 25, (3)

$$a_s = \frac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{\nu + \varrho + 1}{2} + s\right)}{s!};$$

die bekannte Reihenentwicklung[1])

$$e^{-x} J^\nu(xi) = \frac{(2xi)^\nu}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu + s + \frac{1}{2})}{s!\,\Gamma(2\nu + s + 1)} \cdot (2x)^s \tag{16}$$

ergibt dann unmittelbar die folgende Integraldarstellung:

---

1) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 21.

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\infty Q(ty, 1+\nu) J^{\frac{\varrho+\nu}{2}}\left(\frac{tx i}{2}\right) e^{-\frac{tx}{2}} t^{-\frac{\nu+\varrho}{2}} dt = \\ \displaystyle = \frac{i^{\frac{\varrho+\nu}{2}}}{x^{\frac{\varrho-\nu}{2}}\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+1}{2}+s\right)}{s!\,(\varrho+s)} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\varrho+s}, \end{array}\right.$$

aus der für $\varrho = \frac{1}{2}$, $\nu = -\frac{1}{2}$ die speziellere Formel folgt:

$$(18)\quad \int_0^\infty L(t) e^{-\frac{t^2x^2}{2}} J^0\left(\frac{t^2x^2 i}{2}\right) dt = \frac{2}{x} \cdot \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Setzen wir weiter in (17) $\varrho = 1 - \nu$, dann resultiert wegen des Wertes von $J^{\frac{1}{2}}(x)$ ein Spezialfall der Formel § 25, (6).

Als drittes Beispiel setzen wir in § 25, (3)

$$\nu = \frac{1-\varrho}{2}, \quad a_s = \frac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{\varrho+1}{2}+s\right)}{s!\,\Gamma(\varrho+s)},$$

dann entfließt wegen (16) diese andere Formel

$$(19)\quad \sqrt{x} \cdot \int_0^\infty Q\left(ty, \frac{1-\varrho}{2}\right) J^{\varrho-1}(2\sqrt{tx})\, t^{\frac{\varrho-1}{2}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{i^{\frac{\varrho}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}}} \cdot J^{\frac{\varrho}{2}}\left(\frac{xi}{2}\right),$$

aus der sich für $\varrho = 1$ die Formel (4) ergibt.

§ 27. Integrale mit der Lommelschen Funktion.

Wir haben noch die Lommelsche Funktion[1])

$$(1)\quad \Pi^{a,b}(x) = \cos\frac{\pi}{2}(a-b) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{b+2s}}{\Gamma\left(\frac{b+a}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{b-a}{2}+s+1\right)}$$

in Betracht zu ziehen. Zu dem Ende setzen wir in § 25, (3) $1-\nu$ statt ν und

$$a_s = \frac{1}{\Gamma(\varrho+s)},$$

dann folgt diese andere Darstellung der P-Funktion

1) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. p. 21, 87, 227.

$$(2)\quad \begin{cases} \int_0^\infty Q(ty, 1-\nu)\,\Pi^{\nu-1,\,2\varrho-\nu-1}(2i\sqrt{tx})\,t^{\frac{\nu-1}{2}}\,dt = \\ = \dfrac{i^{2\varrho-\nu-1}\cdot\cos\pi(\varrho-\nu)\cdot e^{\frac{x}{y}}}{\Gamma(\varrho)\cdot x^{\frac{\nu+1}{2}}}\cdot P\Big(\frac{x}{y},\varrho\Big), \end{cases}$$

woraus für $\varrho = 1$ die Formel § 26, (3) neu hergeleitet werden kann; denn es ist offenbar

$$\Pi^{a,a}(x) = J^a(x),\quad \Pi^{a,-a}(x) = \cos\pi a\cdot J^{-a}(x).$$

Setzen wir weiter in (2) $\varrho = \nu$, so entfließt nach einer leichten Änderung der Bezeichnungen die Formel

$$(3)\quad \int_0^\infty Q(ty,\nu)J^{-\nu}(2i\sqrt{tx})\,t^{-\frac{\nu}{2}}\,dt = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}\cdot x^{\frac{\nu}{2}-1}}{\Gamma(1-\nu)}\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot P\Big(\frac{x}{y},1-\nu\Big);$$

kombinieren wir demnach diese Formel mit der aus § 26, (3) erhaltenen, indem wir dort $-x = x\cdot e^{\pi i}$ statt x einführen, so gibt die Definition der Zylinderfunktionen zweiter Art

$$Y^\nu(x) = \cot\nu\pi\cdot J^\nu(x) - \frac{1}{\sin\nu\pi}\cdot J^{-\nu}(x)$$

diese andere Integraldarstellung

$$(4)\quad \begin{cases} \int_0^\infty Q(t,\nu)\,Y^\nu(2i\sqrt{tx})\,t^{-\frac{\nu}{2}}\,dt = \\ = i^{-\nu}x^{\frac{\nu}{2}-1}\cdot e^x\cdot\Big[(1-e^{-x})e^{\nu\pi i}\cdot\cot\nu\pi - \dfrac{P(x,1-\nu)}{\Gamma(1-\nu)\sin\nu\pi}\Big]. \end{cases}$$

Für $\nu = 0$ wird der Ausdruck rechter Hand in (4) unbestimmt; die gewöhnliche Methode liefert aber durch Anwendung der Identität[1])

$$Y^0\Big(x\cdot e^{\frac{\pi i}{2}}\Big) = Y^0(x) + \pi i J^0(x)$$

und der Formel § 26, (4) die neue Integraldarstellung:

$$(5)\quad \int_0^\infty \mathrm{li}\,(e^{-t})\,Y^0(2\sqrt{tx})\,dt = \frac{C+\log x - e^x\cdot\mathrm{li}\,(e^{-x})}{\pi x},$$

und somit gestattet die Differentialformel[2])

---

1) 2) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. p. 12 und 28.

$$D_x^n Y^0(2\sqrt{tx}) = \left(-2\sqrt{\frac{t}{x}}\right)^n \cdot Y^n(2\sqrt{tx})$$

dies noch allgemeinere Integral

$$\int_0^\infty \mathrm{li}\,(e^{-t}) Y^n(2\sqrt{tx})\, t^{\frac{n}{2}} dt$$

zu bestimmen; der so erhaltene Ausdruck wird indessen äußerst kompliziert.

Setzen wir endlich in (3) $\nu = \frac{1}{2}$, so folgt diese mit (5) analoge Formel

$$(6) \qquad \int_0^\infty L(t) \cos(2tx)\, dt = \frac{e^{-x^2}}{\pi x i}\left(\sqrt{\pi} - 2L(xi)\right).$$

§ 28. Integralsatz von Sonin.

Schon Soldner[1]) hat bemerkt, daß der Integrallogarithmus uns erlaubt, den Wert mehrerer bestimmter Integrale unmittelbar herzuleiten; er betrachtet nämlich die Formeln

$$(1) \qquad \int_x^\infty \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}\, dt = \mathrm{li}\,(e^{-\beta x}) - \mathrm{li}\,(e^{-\alpha x})$$

$$(2) \qquad \int_x^\infty \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t}\right) dt = \mathrm{li}\,(e^{-x}) - \log(1-e^{-x}),$$

und findet dadurch für $x = 0$ die beiden bekannten Integraldarstellungen

$$(3) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}\, dt = \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$(4) \qquad \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t}\right) dt = C.$$

Wir bemerken noch, daß die Integralformel

$$(5) \qquad \int_x^\infty \left(\frac{e^{-\alpha t}}{t} - \frac{\cos(\beta t)}{t}\right) dt = \mathrm{ci}\,(\beta x) - \mathrm{li}\,(e^{-\alpha x})$$

ohne weiteres für $x = 0$ diese andere

---

1) Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante, p. 38; München 1809.

$$(6) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} - \cos(\beta t)}{t}\, dt = \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

liefert, und somit entfließen aus (3) und (4) die beiden folgenden Integraldarstellungen:

$$(7) \qquad \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)}{t}\, dt = \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$(8) \qquad \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{\cos t}{t}\right) dt = C.$$

Später hat Arndt[1]) ähnliche Anwendungen des Integrallogarithmus gegeben; in der neuesten Zeit hat aber Sonin[2]) diese Integralgattungen von einem allgemeinen Gesichtspunkte aus studiert, ohne offenbar die Bemerkungen von Soldner und Arndt zu kennen. Sonin hat nämlich, ohne von dem Integrallogarithmus oder den verwandten Funktionen Gebrauch zu machen, den folgenden Satz bewiesen:

Es sei $f(t)$ eine solche Funktion, daß $f(t) \log t$ für $t = +\infty$ verschwindet, während die Zahlenwerte

$$(9) \qquad f(0) = a, \quad \int_0^\infty f^{(1)}(t) \log t\, dt = A$$

endliche, nicht oszillierende Größen sind, dann hat man allgemein die beiden Integraldarstellungen:

$$(10) \qquad \int_0^\infty \frac{f(t) - ae^{-\alpha t}}{t}\, dt = \int_0^\infty \frac{f(t) - a\cos(\alpha t)}{t}\, dt = a(C + \log\alpha) - A.$$

Daß die beiden in Frage stehenden Integrale einen Sinn haben und einander gleich sein müssen, ist eine unmittelbare Folge der Formeln (9) und (6); weiter ergibt sich:

$$\int_x^\infty \left(\frac{f(t)}{t} - \frac{ae^{-\alpha t}}{t}\right) dt = a\,\mathrm{li}\,(e^{-\alpha x}) + \int_x^\infty \frac{f(t)}{t}\, dt$$

und durch partielle Integration

---

1) Grunert Archiv, Bd. 10, p. p. 228, 229; 1847.

2) Annalen der Universität Warschau 1889 (russisch).

$$\int_x^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = -f(x)\log x - \int_x^\infty f^{(1)}(t)\log t\,dt,$$

woraus folgt

$$\int_x^\infty \frac{f(t)-ae^{-at}}{t}\,dt = a(\mathrm{li}(e^{-ax})-\log x)-(f(x)-f(0))\log x - \int_x^\infty f^{(1)}(t)\log t\,dt;$$

läßt man nunmehr in dieser letzten Formel x gegen Null konvergieren, so resultiert genau die Formel (10).

Als erstes Beispiel setzen wir

$$f(t) = \frac{1}{1+t^\beta} \qquad \Re(\beta) > 0,$$

es ist dann $a = 1$, $A = 0$, und somit finden wir die beiden Formeln

$$(11)\quad \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^\beta} - e^{-at}\right)\frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^\beta} - \cos(at)\right)\frac{dt}{t} = C + \log a.$$

Als zweites Beispiel setzen wir

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\cdot \operatorname{arccot} t, \qquad a = 1, \qquad A = 0,$$

und somit entfließen die Formeln von Sonin

$$(12)\quad \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi}\cdot\operatorname{arccot} t - e^{-at}\right)\frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi}\cdot\operatorname{arccot} t - \cos(at)\right) = C + \log a.$$

Als drittes Beispiel setzen wir

$$f(t) = J^0(t), \qquad a = 1, \qquad f^{(1)}(t) = -J^1(t);$$

da nun einer bekannten Formel[1]) zufolge

$$-\int_0^\infty J^1(t)\log t\,dt = C - \log 2$$

ist, so finden wir die beiden Integraldarstellungen:

$$(13)\quad \int_0^\infty (J^0(t) - e^{-at})\frac{dt}{t} = \int_0^\infty (J^0(t) - \cos(at))\frac{dt}{t} = \log(2a),$$

die ebenfalls Sonin zu verdanken sind.

---

1) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 190.

Hermite[1]) betrachtet später, offenbar ohne die Arbeit von Sonin zu kennen, den folgenden Spezialfall der Formel (10):

$$\int_0^\infty (f(x) - e^{-ax})\frac{dx}{x},$$

wo $f(x)$ eine in x echt gebrochene rationale Funktion bedeutet, so daß $f(0) = 1$ ist.

§ 29. Weitere Integraldarstellungen der Eulerschen Konstante.

Als eine weitere Anwendung des Integrallogarithmus wollen wir noch das folgende Analogon des Satzes von Sonin beweisen:

Es sei das bestimmte Integral

$$\Omega(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-tx}dt, \tag{1}$$

welches für $\Re(x) > \omega$ konvergiert, für jeden endlichen Wert von x, welcher dieser Bedingung Genüge leistet, eine in x differentiierbare Funktion, für welche außerdem

$$\lim_{\Re(x)=+\infty} (x^\varrho \cdot \Omega(x)) = 0 \tag{2}$$

ist, wo ϱ eine angebbare aber beliebig kleine positive Größe bedeutet, dann ist immer für $\Re(x) > \omega$

$$C \cdot \Omega(x) = \int_0^\infty (\Omega^{(1)}(t + x) - f(t)e^{-tx}) \log t dt,$$

wo C die Eulersche Konstante bedeutet.

Aus (1) findet sich nämlich

$$-\int_y^\infty \frac{\Omega(t+x)}{t} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-tx}\,\mathrm{li}(e^{-ty})dt, \quad \Re(x+y) > \omega, \tag{3}$$

woraus durch Anwendung der partiellen Integration folgt:

$$\Omega(x+y)\log y + \int_y^\infty \Omega^{(1)}(t+x)\log t dt = \int_0^\infty f(t)e^{-tx}\,\mathrm{li}(e^{-ty})dt; \tag{4}$$

führen wir demnach in das Integral rechter Hand in (4) die bekannte Entwicklung des Integrallogarithmus ein, so entfließt eine Identität von der Form

---

1) Casopis Bd. 23, p. 273—274; 1894.

$$C\cdot\Omega(x)+F(x,y)=(\Omega(x+y)-\Omega(x))\log y+$$
$$+\int_y^\infty(\Omega^{(1)}(t+x)-f(t)e^{-tx})\log t\,dt;$$

da nun offenbar $F(x,y)$ mit y verschwindet, so haben wir nur in dieser Formel $y=0$ zu setzen, um die Integraldarstellung (3) zu erhalten.

Hinsichtlich der großen Allgemeinheit der so erhaltenen Integralformel (3) bemerken wir, daß sie für jede konvergente Fakultätenreihe

$$\Omega(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{s!\,c_s}{x(x+1)\cdots(x+s)}$$

giltig bleibt, so daß die Theorie der Gammafunktion uns viele speziellere Anwendungen unserer Integralformel gestattet.

Als erstes Beispiel betrachten wir die altbekannte Formel

$$\frac{\Gamma(\nu)}{x^\nu}=\int_0^\infty e^{-tx}t^{\nu-1}dt,\quad \Re(x)\geq 0,\ \Re(\nu)>0 \tag{5}$$

und finden dann aus (3)

$$\frac{C}{x^\nu}=-\int_0^\infty\left(\frac{\nu}{(t+x)^{\nu+1}}+\frac{e^{-tx}t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\right)\log t\,dt; \tag{6}$$

differentiieren wir nun die Formel (5) nach ν, so erhalten wir

$$\frac{\Gamma(\nu)}{x^\nu}(\Psi(\nu)-\log x)=\int_0^\infty e^{-tx}t^{\nu-1}\log t\,dt,$$

und somit entfließt aus (8) die elegante Formel

$$\frac{C+\Psi(\nu)-\log x}{x^\nu}=-\nu\cdot\int_0^\infty\frac{\log t}{(t+x)^{\nu+1}}\,dt,\quad \Re(\nu)>0, \tag{7}$$

in der x nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl angenommen werden darf.

Aus (7) kann eine große Menge anderer Formeln hergeleitet werden; setzen wir z. B. $\nu=1$, so folgt

$$\frac{\log x}{x}=\int_0^\infty\frac{\log t}{(t+x)^2}\,dt, \tag{8}$$

woraus durch Integration nach x sich ergibt:

$$(9) \qquad \tfrac{1}{2}(\log x)^2 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+x}\right)\log t\,dt.$$

Setzen wir nun weiter

$$(10) \qquad \zeta(\nu,x,\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\alpha^s}{(x+s)^\nu},$$

wo demnach $|\alpha| < 1$ oder speziell $\alpha = 1$, $\Re(\nu) > 1$; $|\alpha| = 1$, $\Re(\nu) > 0$ angenommen werden muß, während x weder Null noch negativ ganz sein darf, so folgt aus (7)

$$(11) \quad (C + \Psi(\nu))\cdot\zeta(\nu,x,\alpha) + D_\nu\zeta(\nu,x,\alpha) = \int_0^\infty D_t\zeta(\nu,t+x,\alpha)\log t\,dt,$$

woraus für $\alpha = -1$, $\nu = 1$ sich ergibt:

$$(12) \qquad \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \log s}{s} = \int_0^\infty \beta^{(1)}(t+1)\log t\,dt.$$

Aus der Formel (6) finden wir in ähnlicher Weise

$$(13) \qquad C\cdot\beta(x) = \int_0^\infty \left(\beta^{(1)}(t+x) - \frac{e^{-tx}}{1+e^{-t}}\right)\log t\,dt, \quad \Re(x) > 0,$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{c} C\cdot(\Psi(x) - \Psi(x+y)) = \\ \displaystyle\int_0^\infty \left(\Psi^{(1)}(t+x) - \Psi^{(1)}(t+x+y) - \frac{1-e^{-ty}}{1-e^{-t}}\cdot e^{-tx}\right)\log t\,dt, \end{array} \right.$$

wo in (14) sowohl $\Re(x) > 0$ als $\Re(x+y) > 0$ angenommen werden muß; aus (13) finden wir für $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ Integraldarstellungen der beiden Produkte $C\cdot\log 2$ und $C\cdot\pi$.

Es ist bemerkenswert, daß die Formel (6) als eine Verallgemeinerung derjenigen aus § 28, (11) für $\beta = 1$ hervorgehenden, von Dirichlet[1]) herrührenden Integraldarstellung der Eulerschen Konstante angesehen werden kann. Setzen wir nämlich in (8) $t = 1$, so leuchtet ein, daß die Formel (6) für $\nu = 1$ auch folgendermaßen geschrieben werden kann

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{(1+t)^2} - e^{-t}\right)\log t\,dt,$$

und die Formel von Dirichlet geht dann durch partielle Integration aus dieser letzten hervor.

---

1) Handbuch der Gammafunktion, pp. 185, 175.

Indem wir vorübergehend bemerken, daß das Integral von Binet[1])

$$\log x - \Psi(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + 1\right) e^{-tx} dt, \quad \Re(x) > 0,$$

die Formel

$$(15)\quad C^2 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - \Psi^{(1)}(1+t) - \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + 1\right) e^{-t}\right) \log t\, dt$$

liefert, wollen wir nunmehr die elementare Formel

$$\log\left(1 + \frac{y}{x}\right) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ty}}{t} \cdot e^{-tx} dt, \quad \Re(x) > 0, \quad \Re(x+y) > 0$$

etwas eingehender untersuchen.

Aus (3) finden wir unmittelbar

$$(16)\quad C \cdot \log\left(1 + \frac{y}{x}\right) = -\int_0^\infty \left(\frac{1}{(t+x)} \frac{y}{(t+x+y)} - \frac{e^{-tx} - e^{-tx-ty}}{t}\right) \log t\, dt,$$

woraus für $x = y = 1$ eine neue Integraldarstellung für das Produkt $C \cdot \log 2$ folgt; wenden wir noch die Identität (4) an, so ergibt sich nach einer leichten Änderung der Bezeichnungen

$$(17)\qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^s}{s^2} = \int_0^\infty \frac{1 - e^{tx}}{t} \cdot \mathrm{li}(e^{-t}) dt;$$

die Funktion linker Hand in (17) ist der sogenannte „Dilogarithmus".[2])

Aus der Integraldarstellung § 5, (1) finden wir endlich noch wegen (17)

$$(18)\qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^s}{s^2} = \int_0^\infty \frac{C + \log(-tx) - \mathrm{li}(e^{tx})}{t} \cdot \mathrm{li}(e^{-t})\, dt,$$

eine Formel, die überall da giltig bleibt, wo dies mit (17) der Fall ist.

Es ist bemerkenswert, daß die beiden Integrale in (17) und (18) in der durch die Bedingung $\Re(x) \leqq 1$ bestimmten Halbebene einen Sinn haben und somit die analytische Fortsetzung der beiden im Innern des Einheitskreises konvergierenden Potenzreihen darstellen.

1) Handbuch der Gammafunktion, pp. 185, 175.

2) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik Bd. 29, p. 377; 1898.

Kapitel V.

Verschiedene Reihenentwicklungen.

§ 30. Partialbruchentwicklungen.

Es ist wohlbekannt, daß schon Schlömilch[1]) die Funktion $e^x Q(x,\nu)$ in eine Fakultätenreihe mit dem Argument x entwickelt hat, und daß er daraus für $\nu = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$ die entsprechenden spezielleren Entwicklungen für die beiden Funktionen $e^x \mathrm{li}(e^{-x})$ und $e^{x^2} L(x)$ hergeleitet hat. Da wir hier nichts Neues über diese Entwicklungen mitzuteilen haben, und da diese Entwicklungen selbst von ziemlich komplizierter Natur sind, so beschränken wir uns auf die bloße Erwähnung ihrer Existenz und verweisen den Leser auf das Handbuch der Theorie der Gammafunktion, p. 283.

Ganz dieselben Bemerkungen gelten für diejenigen Reihenentwicklungen, welche Hermite[2]) und Mellin[3]) für die Funktion $Q(x,\nu)$ hergeleitet haben; auch sie können unmittelbar auf die Funktionen $\mathrm{li}(e^{-x})$ und $L(x)$ angewendet werden. Die so erhaltenen spezielleren Reihen scheinen aber kein besonderes Interesse darzubieten.

In ähnlicher Weise beschränken wir uns hier auf die bloße Erwähnung der Neumannschen Reihen nach Kugel- und Zylinderfunktionen, welche aus der bekannten Entwicklung[4])

$$e^{i\alpha x} = \frac{\Gamma(\varrho)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} i^s (\varrho + s) J^{\varrho+s}(x) P^{\varrho,s}(\alpha)$$

hergeleitet werden können; auch diese Formeln werden etwas kompliziert.

In diesem Zusammenhang wollen wir mehr im einzelnen die Anwendung der beiden elementaren Formeln[5])

$$(1) \qquad \sin(tx) = \frac{\sin \pi x}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s \left(\frac{1}{x-s} - \frac{1}{x+s}\right) \sin(st)$$

---

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 4, p. 396; 1859 (Gammafunktion, p. 284).

2) Journal für Mathematik Bd. 90, p. 332—338; 1881. (Gammafunktion, p. 213).

3) Acta Mathematica Bd. 2, p. 231—232; 1883. (Gammafunktion, p. 214).

4) 5) Handbuch der Zylinderfunktionen pp. 277, 383.

$$(2) \qquad \cos(tx) = \frac{\sin \pi x}{\pi}\left(\frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s \left(\frac{1}{x-s} + \frac{1}{x+s}\right) \cos(st),\right.$$

wo x eine willkürliche endliche Größe bedeutet, während $-\pi < t < +\pi$ anzunehmen ist, untersuchen; aus (1) ergibt sich ohne weiteres

$$\int_0^\alpha \frac{\sin(tx)}{t}\, dt = \frac{\sin \pi x}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s \left(\frac{1}{x-s} - \frac{1}{x+s}\right) \cdot \int_0^\alpha \frac{\sin(st)}{t}\, dt,$$

woraus wegen § 5, (3)

$$(3) \quad \mathrm{si}(\alpha x) + \frac{\pi}{2} = \frac{\sin \pi x}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s \left(\frac{1}{x-s} - \frac{1}{x+s}\right) \cdot \left(\mathrm{si}(s\alpha) + \frac{\pi}{2}\right),$$

folgt, eine Gleichung, in der also $-\pi < \alpha < +\pi$ angenommen werden muß, während x eine willkürliche endliche Größe sein darf.

Unter Zuhilfenahme der Identität

$$(4) \qquad \frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s \left(\frac{1}{x-s} + \frac{1}{x+s}\right)$$

finden wir aus (2) die Entwicklung

$$\frac{\cos(tx) - 1}{t} = \frac{2x \sin \pi x}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^2 - x^2} \cdot \frac{\cos(st) - 1}{t},$$

und somit ergibt sich wegen § 5, (2) die (3) ähnliche Formel

$$(5) \qquad \begin{aligned} \mathrm{ci}(\alpha x) - \log x = {} & \frac{2x \sin \pi x}{\pi} \cdot (C + \log \alpha) + \\ & + \frac{2x \sin \pi x}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^2 - x^2} (\mathrm{ci}(s\alpha) - \log s), \end{aligned}$$

die überall da anwendbar ist, wo dies mit (3) der Fall ist.

Um nun auch eine ähnliche Entwicklung für den Integrallogarithmus zu erhalten, setzen wir in (3) und (5) $\pm ix$ statt x; die Addition oder Subtraktion der so erhaltenen Formeln ergibt dann unmittelbar das gewünschte Resultat:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\mathrm{li}(e^{-\alpha x}) - \log x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} = \frac{C + \log \alpha}{2x} + \\ & + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{n^2 + x^2} \left(n\left(si(n\alpha) + \frac{\pi}{2}\right) - x(\mathrm{ci}(n\alpha) - \log n)\right), \end{aligned} \right.$$

in welcher Formel demnach auch $-\pi < \alpha < +\pi$ anzunehmen ist.

Wir überlassen es dem Leser, die entsprechenden Entwicklungen für die drei Funktionen $L(x)$, $C(x)$ und $S(x)$ herzuleiten.

§ 31. Besondere Entwicklungen für si(x).

Aus der Integralformel § 5, (26)

$$-\operatorname{si}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\cos\Theta}\cos(x\sin\Theta)\,d\Theta \tag{1}$$

können noch verschiedene andere merkwürdige Reihenentwicklungen hergeleitet werden; führen wir nämlich in das Integral rechter Hand die gewöhnliche Potenzreihe statt der Exponentialfunktion ein, so ergibt sich aus (1)

$$-\operatorname{si}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^s}{s!} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\Theta)(\cos\Theta)^s\,d\Theta,$$

und somit liefert die Integraldarstellung von Bessel[1])

$$J^\nu(x) = \frac{2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\Theta)(\cos\Theta)^{2\nu}\,d\Theta,\ \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2}$$

unter Anwendung der bekannten Eulerschen Formel

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu) = \Gamma(\nu)\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\cdot 2^{2\nu-1}$$

diese erste Entwicklung

$$-\operatorname{si}(x) = \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\cdot J^{\frac{s}{2}}(x), \tag{2}$$

die in der ganzen x-Ebene anwendbar ist.

Setzen wir demnach in (2) $-x$ statt x, so erhalten wir

$$-\operatorname{si}(-x) = \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\cdot J^{\frac{s}{2}}(x), \tag{3}$$

und somit ergibt die Addition der beiden Formeln (2) und (3) die bekannte Entwicklung[2])

$$1 = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^s}{s!}\cdot J^s(x), \tag{4}$$

1) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 51.

2) Handbuch der Zylinderfunktionen, pp. 267, 60 und 61, 65.

aus der sich wegen (2) die folgende Formel ergibt:

$$\text{si}(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{s+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}\cdot J^{s+\frac{1}{2}}(x), \tag{5}$$

die ganz sicher neu ist.

Aus der Reihenentwicklung von Jacobi[1])

$$\cos(x\sin\Theta) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\varepsilon_s J^{2s}(x)\cos(2s\Theta),$$

wo $\varepsilon_0 = 1$ und allgemein $\varepsilon_s = 2$, für $s \geq 1$, zu setzen ist, finden wir nun auch wegen (1)

$$-\text{si}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\varepsilon_s J^{2s}(x)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\cos\theta}\cos(s\Theta)\,d\Theta. \tag{6}$$

Setzen wir aber der Kürze halber

$$\Omega^{2n}(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin(x\sin\varphi - 2n\varphi)\,d\varphi,$$

wo n eine ganze nicht negative Zahl bedeutet, so ist leicht einzusehen, daß $\Omega^{2n}(x)$ eine in x ganze transzendente und ungerade Funktion sein muß. Benutzen wir dann weiter die bekannte Integraldarstellung[2])

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\cos\theta}\cos(2n\Theta)\,d\Theta = \frac{\pi}{2}\cdot(J^{2n}(xi) + i\Omega^{2n}(xi)),$$

so entfließt wegen (6) die Reihenentwicklung

$$-\text{si}(x) = \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\varepsilon_s J^{2s}(x)(J^{2s}(xi) + i\Omega^{2s}(xi)), \tag{7}$$

aus der durch Änderung der Zeichen von x folgt:

$$-\text{si}(-x) = \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\varepsilon_s J^{2s}(x)(J^{2s}x(i) - i\,\Omega^{2s}(xi)). \tag{8}$$

Die Addition der Formeln (7) und (8) liefert dann die eigentümliche Formel[3])

1) 2) Handbuch der Zylinderfunktionen, pp. 267, 60 und 61, 65.

3) Über die Formel (9) vergleiche man meine Abhandlung in Reale Accad. dei Lincei, Rendiconti Bd. 15, p. 490—497; 6. Mai 1906.

$$1 = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s J^{2s}(x) J^{2s}(xi), \tag{9}$$

die ganz sicher neu ist, und somit ergibt sich wegen (7)

$$\mathrm{si}(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2i} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s J^{2s}(x)\, \Omega^{2s}(xi). \tag{10}$$

Wir überlassen es dem Leser, die Integraldarstellung § 5, (27) in ähnlicher Weise zu verwenden.

§ 32. Fouriersche Reihen für verschiedene elementare Funktionen.

Es ist offenbar, daß die in § 21 entwickelten Formelgruppen (1) bis (4) und (12) bis (15) uns unmittelbar gestatten, die Koeffizienten der folgenden im Intervall $0 < x < 2\pi$ brauchbaren Fourierschen Reihen:

$$\mathrm{si}(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (a_s \cos(sx) + b_s \sin(sx))$$

$$\mathrm{ci}(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (a_s' \cos(sx) + b_s' \sin(sx))$$

$$C(\sqrt{\alpha x}) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (c_s \cos(sx) + d_s \sin(sx))$$

$$S(\sqrt{\alpha x}) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (c_s' \cos(sx) + d_s' \sin(sx))$$

herzuleiten. Da diese Koeffizienten unmittelbar durch Einsetzen in die erwähnten unbestimmten Integrale bestimmt werden können, so wollen wir dieselben hier nicht niederschreiben, sondern bemerken, daß die beiden ersten Reihen zuerst von Schlömilch[1]) angegeben worden sind.

Unter Anwendung der in § 5 gefundenen Integralformeln lassen sich auch unmittelbar verschiedene elementare Fouriersche Reihen herleiten. Aus § 5, (3) finden wir z. B. unter Anwendung einer elementaren trigonometrischen Identität

$$\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin(\alpha x)\cos(nx)}{x}\, dx = \frac{\mathrm{si}(n\pi + \alpha\pi) - \mathrm{si}(n\pi - \alpha\pi)}{\pi},$$

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 5, p. 294—296; 1860.

und somit ergibt sich ohne weiteres diese im Intervall $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ anwendbare Reihe

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sin(\alpha x)}{x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{si}(\alpha\pi)}{\pi} + \\ + \dfrac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} (\mathrm{si}(n\pi + \alpha\pi) - \mathrm{si}(n\pi - \alpha\pi)) \cdot \cos(nx), \end{array} \right.$$

woraus für $\alpha = \pm\pi$ folgt:

$$(2)\quad \frac{\pi}{2} - \mathrm{si}(\alpha\pi) + \sin(\alpha\pi) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} (\mathrm{si}(n\pi + \alpha\pi) - \mathrm{si}(n\pi - \alpha\pi)).$$

Integrieren wir nunmehr die Formel (1) von 0 bis x, was offenbar durch gliedweise Integration der Reihe rechter Hand geschehen kann, so entspringt diese andere Entwicklung

$$(3)\quad \frac{\pi}{2} + \mathrm{si}(\alpha x) = \frac{x}{2} + \frac{x\,\mathrm{si}(\alpha\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mathrm{si}(n\pi + \alpha\pi) - \mathrm{si}(n\pi - \alpha\pi)}{n\pi} \cdot \sin(nx),$$

die ebenfalls im Intervall $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ richtig bleibt; der Spezialfall $\alpha = 1$ ist in etwas anderer Form von Fenolio[1]) gefunden worden.

In ganz ähnlicher Weise finden wir wegen § 5, (3) diese mit (1) analoge Formel

$$(4)\quad \frac{\cos(\alpha x) - 1}{x} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\mathrm{si}(n\pi + \alpha\pi) + \mathrm{si}(n\pi - \alpha\pi) - 2\,\mathrm{si}(n\pi)}{\pi} \cdot \sin(nx),$$

in der ebenfalls $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ anzunehmen ist.

Wenden wir uns nunmehr zu den elementaren Integraldefinitionen § 5, (24) und (25), so ergeben sich für die Koeffizienten der folgenden, im Intervall $0 < x < 2\pi$ giltigen, Fourierschen Reihe

$$(5)\quad \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

die Ausdrücke:

$$(6)\quad a_n = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot C(\sqrt{2n\pi}), \quad b_n = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot S(\sqrt{2n\pi}).$$

---

1) Zitat von Schlömilch in Zeitschrift für Math. und Phys. Bd. 2, p. 101. (Literaturzeitung.)

Die partielle Integration liefert nun sofort

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{x} \cdot \cos(nx)\,dx = -\frac{1}{2n} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{x} \cdot \sin(nx)\,dx = -\frac{\sqrt{2\pi}}{n} + \frac{1}{2n} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{x}}\,dx,$$

und somit folgt diese andere ebenfalls im Intervall $0 < x < 2\pi$ brauchbare Fouriersche Reihe

$$(7) \qquad \sqrt{x} = \frac{2}{3}\sqrt{2\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} (a'_n \cos(nx) + b'_n \sin(nx)),$$

in der der Kürze halber

$$(8) \qquad a'_n = -\sqrt{\frac{\pi}{8n^3}} + \frac{S(\sqrt{2n\pi})}{\sqrt{n^3}},\ b'_n = -\frac{\sqrt{2\pi}}{n} + \sqrt{\frac{\pi}{8n^3}} - \frac{C(\sqrt{2n\pi})}{\sqrt{n^3}}$$

gesetzt worden ist.

Integrieren wir aber die Formel (5) von 0 bis x, so ergibt eine Vergleichung mit (7) die numerische Gleichheit

$$(9) \qquad \sqrt{2\pi^3} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 2S(\sqrt{2n\pi})}{\sqrt{n^3}}.$$

Wir erwähnen noch vorübergehend, daß dieselben Integralformeln § 5, (24) und (25) die Koeffizienten der beiden für $0 < x < 2\pi$ anwendbaren Reihen

$$(10) \qquad \frac{\sin(\alpha x)}{\sqrt{x}} = \sum_{s=0}^{s=\infty} (a_s \cos(sx) + b_s \sin(sx))$$

$$(11) \qquad \frac{\cos(\alpha x)}{\sqrt{x}} = \sum_{s=0}^{s=\infty} (a'_s \cos(sx) + b'_s \sin(sx))$$

unmittelbar bestimmen.

§ 33. Fouriersche Reihen für $\log x$, $\log \Gamma(x+1)$ und $\Psi(x+1)$.

Die Integralformeln § 5, (12) und (13) liefern ohne weiteres für die Koeffizienten der Reihe

$$(1) \quad \log x = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad 0 < x < 2\pi$$

die Ausdrücke

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \log x \cdot \cos(nx) dx = -\frac{1}{n\pi}\left(\mathrm{si}(2n\pi) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \log x \cdot \sin(nx) dx = \frac{1}{n\pi}(\mathrm{ci}(2n\pi) - C - \log(2n\pi));$$

direkt ergibt sich

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \log x dx = \log(2\pi) - 1.$$

Ziehen wir nunmehr die beiden in § 7, (11) und (12) aus der gewöhnlichen logarithmischen Reihe hergeleiteten Entwicklungen

$$-\log\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\cos(sx)}{s}$$

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\sin(sx)}{s}$$

in Betracht, und setzten noch in (1) $2\pi x$ statt x, so folgt die Formel

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + \log x - \frac{1}{2}\log(2 \sin \pi x) + (C + \log(2\pi))(\frac{1}{2} - x) = \\ = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(\mathrm{ci}(2n\pi) - \log n) \sin(2n\pi x) - \mathrm{si}(2n\pi) \cos(2n\pi x)}{n\pi}, \end{array} \right.$$

in der also $0 < x < 1$ vorauszusetzen ist.

Setzen wir nun in (2) $1 - x$ statt x, so erhalten wir durch Addition der beiden so gefundenen Formeln

$$(3) \log x + \log(1 - x) - \log(2 \sin \pi x) + 2 = -\frac{2}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\mathrm{si}(2s\pi) \cos(2n\pi x)}{n},$$

wo ebenfalls $0 < x < 1$ sein muß.

Da nun die Funktion linker Hand in (3) gleich große Werte für $x = 0$ und $x = 1$ annimmt, so folgt für $x = 0$ oder $x = 1$ die numerische Gleichung

$$\frac{\pi}{2}(\log(2\pi) - 2) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\mathrm{si}(2s\pi)}{s}, \tag{4}$$

die uns später sehr nützlich sein wird.

Die Formel (2) fordert ganz natürlich zur Vergleichung mit der bekannten Reihe von Kummer[1])

$$\left\{ \begin{aligned} \log \Gamma(x) = \left(\tfrac{1}{2} - x\right)\left(C + \log(2\pi)\right) + \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right) + \\ + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\log s}{\pi s} \cdot \sin(2s\pi x) \end{aligned} \right. \tag{5}$$

auf; da (5) ebenso wie (2) im Intervall $0 < x < 1$ giltig ist, so gibt die Addition dieser beiden Formeln dies Analogon der Kummerschen Reihe:

$$\left\{ \begin{aligned} \log \Gamma(x+1) = -1 + \log \sqrt{2\pi} + \\ + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mathrm{ci}(2n\pi)\sin(2n\pi x) - \mathrm{si}(2n\pi)\cos(2n\pi x)}{n\pi}, \end{aligned} \right. \tag{6}$$

wo also auch $0 < x < 1$ vorauszusetzen ist.

Aus (6) ergibt sich für $x = 0$ oder $x = 1$ die numerische Gleichung

$$\log \sqrt{2\pi} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mathrm{si}(2n\pi)}{n\pi}, \tag{7}$$

während die Annahme $x = \frac{1}{2}$ die ähnliche Formel

$$\log \sqrt{2} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \mathrm{si}(2n\pi)}{n\pi} \tag{8}$$

liefert.

Erinnern wir uns nun an die Integralrelation

$$\int_1^x \Psi(x)\,dx = \log \Gamma(x),$$

so erhalten wir

$$\int_0^1 \Psi(x+1)\,dx = 0$$

und durch partielle Integration

1) Handbuch der Gammafunktion, p. 201.

$$\int_0^1 \Psi(x+1)\cos(2n\pi x)dx = 2n\pi \cdot \int_0^1 \log\Gamma(x+1)\sin(2n\pi x)dx$$

$$\int_0^1 \Psi(x+1)\sin(2n\pi x)dx = -2n\pi \cdot \int_0^1 \log\Gamma(x+1)\cos(2n\pi x)dx;$$

aus (6) folgt daher dies Analogon der Reihe von Lerch[1]):

$$(9)\quad \tfrac{1}{2}\cdot\Psi(x+1) = \sum_{n=1}^{n=\infty}(\mathrm{ci}\,(2n\pi)\cos(2n\pi x) + \mathrm{si}\,(2n\pi)\sin(2n\pi x)),$$

eine Formel, die auch im Intervall $0 < x < 1$ richtig bleibt.

Da nun

$$\Psi(1) = -C, \quad \Psi(2) = -C+1,$$

so findet sich aus (9) für $x = 0$ oder $x = 1$ die numerische Identität

$$(10)\qquad \tfrac{1}{2} - C = \sum_{n=1}^{n=\infty}\mathrm{ci}\,(2n\pi),$$

während die Annahme $x = \frac{1}{2}$ die ähnliche Formel

$$(11)\qquad 1 + \log 2 - \tfrac{1}{2}C = \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\,\mathrm{ci}\,(2n\pi)$$

liefert.

Setzen wir noch in (9) $1-x$ statt x, so bekommen wir

$$(12)\quad \tfrac{1}{2}\Psi(2-x) = \sum_{n=1}^{n=\infty}(\mathrm{ci}\,(2n\pi)\cos(2n\pi x) - \mathrm{si}\,(2n\pi)\sin(2n\pi x)),$$

woraus durch Subtraktion von (11) und (12) und unter Anwendung der beiden Identitäten

$$\Psi(x+1) = \frac{1}{x} + \Psi(x), \quad \Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi\cot\pi x$$

die andere Fouriersche Reihenentwicklung folgt

$$(13)\qquad \pi\cot\pi x = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + 2\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty}\mathrm{si}\,(2n\pi)\sin(2n\pi x),$$

die ebenfalls im Intervall $0 < x < 1$ richtig bleibt; für $x = \frac{1}{4}$ finden wir aus (13)

$$(14)\qquad \pi - \tfrac{3}{8} = 2\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\,\mathrm{si}\,(4n\pi + 2\pi).$$

---

1) Handbuch der Gammafunktion, p. 204.

§ 34. Analogien der Bernoullischen Funktionen.

Aus der von der logarithmischen Reihe aus hergeleiteten Formel

$$(1) \qquad \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\sin(rx)}{r}, \quad 0 < x < 2\pi$$

ergeben sich durch wiederholte Integration die allgemeinen Entwicklungen

$$(2) \qquad \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \sum_{r=0}^{r=n} \frac{(-1)^r s_{2r} \cdot x^{2n+2r}}{(2n-2r)!} = (-1)^n \cdot \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\cos(rx)}{r^{2n}}$$

$$(3) \qquad \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{r=0}^{r=n} \frac{(-1)^r s_{2r} \cdot x^{2n-2r+1}}{(2n-2r+1)!} = (-1)^n \cdot \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\sin(rx)}{r^{2n+1}},$$

die für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ richtig bleiben, und wo der Kürze halber

$$(4) \qquad s_0 = \tfrac{1}{2}, \quad s_{2n} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r^{2n}} \quad n \geqq 1$$

zu setzen ist.

Eine Anwendung der elementaren Integraldarstellungen § 5 (2), (3) ergibt dann, wenn in (2) das letzte Glied s_{2n} linker Hand überführt wird, die beiden Analogien der Formeln (2) und (3)

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!\,(2n-1)} - \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r s_{2r} \cdot x^{2n-2r}}{(2n-2r)!\,(2n-2r)} = \\ &\qquad = (-1)^n \cdot \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\operatorname{ci}(rx) - C - \log(rx)}{r^{2n}} \end{aligned} \right.$$

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!\,2n} - \sum_{r=0}^{r=n} \frac{(-1)^r s_{2r} \cdot x^{2n-2r+1}}{(2n-2r+1)!\,(2n-2r+1)} = \\ &\qquad = (-1)^n \cdot \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\operatorname{si}(rx) + \frac{\pi}{2}}{r^{2n+1}}. \end{aligned} \right.$$

Die beiden so erhaltenen Reihen sind ebenso wie (2) und (3) für jeden *reellen* Wert von x konvergent, stellen aber in den verschiedenen Intervallen von der Größe 2π verschiedene Funktionen von x dar.

Für $n = 0$ wird die Formel (6) sinnlos; aus (1) folgt aber

$$\frac{\pi}{2} \cdot \log x - \frac{x}{2} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\mathrm{si}\,(rx)}{r} + K. \tag{7}$$

Um nun den Wert von K zu bestimmen, setzen wir in (7) $x = 2\pi$, erhalten dann wegen § 33, (4)

$$K = 0,$$

und es ergibt sich die gesuchte Formel

$$\frac{\pi}{2} \cdot \log x - \frac{x}{2} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\mathrm{si}\,(rx)}{r}, \tag{8}$$

welche demnach für $0 < x \leqq 2\pi$ richtig ist.

In ähnlicher Weise finden wir aus (2) und (3) unter Anwendung von § 5, (15), (16) die beiden anderen Formeln

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{2n-\frac{1}{2}}}{(2n-1)!\,(2n-\frac{1}{2})} - \sum_{r=0}^{r=n} \frac{(-1)^r s_{2r} \cdot x^{2n-2r+\frac{1}{2}}}{(2n-2r)!\,(2n-2r+\frac{1}{2})} = \\ &\qquad = (-1)^n \cdot \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{8}} - C(\sqrt{rx})}{r^{2n+\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right. \tag{9}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!\,(2n+\frac{1}{2})} - \sum_{r=0}^{r=n} \frac{(-1)^r s_{2r} \cdot x^{2n-2r+\frac{3}{2}}}{(2n-2r+1)!\,(2n-2r+\frac{3}{2})} = \\ &\qquad = (-1)^n \cdot \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{8}} - S(\sqrt{rx})}{r^{2n+\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \tag{10}$$

welche dieselben Diskontinuitäten wie (2) und (3) oder (5) und (6) darbieten.

Setzen wir noch in (1) $\pi - x$ statt x, so erhalten wir die Formel

$$\frac{x}{2} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1} \sin\,(rx)}{r}, \quad -\pi < x < +\pi. \tag{11}$$

Wir können somit durch wiederholte Integration allgemeinere Formeln, welche (2) und (3) ähnlich sind, herleiten, woraus ohne Mühe vier mit den vorhergehenden ähnliche Entwicklungen hervorgehen.

Wir beschränken uns indessen auf die speziellere aus (11) abgeleitete Formel

$$(12) \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \log 2 + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \cdot \mathrm{si}\,(sx), \quad -\pi < x < +\pi.$$

Kapitel VI.

Numerische Berechnung der sechs Transzendenten.

§ 35. Über die Addition der Argumente.

Hölder[1]) hat nachgewiesen, daß die Funktion

$$(1) \qquad \mathrm{li}\,(e^{-x}) - C - \log x = \int_0^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt$$

keiner algebraischen Fundamentalgleichung Genüge leisten kann; es würde uns indessen viel zu weit führen, hier den Beweis dieses Satzes mitzuteilen, so daß wir den Leser auf die Höldersche Arbeit selbst hinweisen müssen.

Als Spezialfälle des Hölderschen Satzes folgern wir aber, daß die Funktion (1) weder eine Additionsformel, wie z. B. die periodischen Funktionen, noch eine Multiplikationsformel, wie z. B. die Gammafunktion, besitzen kann; ähnliches gilt sicher auch für die sechs Transzendenten, die wir im vorhergehenden untersucht haben.

Wollen wir daher eine Methode zur numerischen Berechnung dieser Transzendenten entwickeln, so bleibt offenbar nichts anderes übrig, als eine Taylorsche Reihe oder ähnliche Folgerungen der Definitionen dieser Funktionen zu benutzen.

Ziehen wir zuerst den Integrallogarithmus in Betracht, so ist erstens

$$(2) \qquad D_x\,\mathrm{li}\,(e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{x},$$

und somit folgt aus der Formel von Bessel § 2, (12):

$$(3) \qquad D_x^n\,\mathrm{li}\,(e^{-x}) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} + \frac{(-1)^n}{x^n} \cdot P(x, n),$$

---

1) Göttinger Nachrichten 1887, p. 662—676.

aus welcher Gleichung die Taylorsche Reihenentwicklung

$$(4)\quad \mathrm{li}\,(e^{-x-h}) = \mathrm{li}\,(e^{-x}) + \log\left(1+\frac{h}{x}\right) + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \cdot P(x,s) \cdot \left(\frac{h}{x}\right)^s,$$

die offenbar für jeden endlichen Wert von x und h richtig bleibt, wenn nur $x = 0$ und $x + h = 0$ ausgeschlossen werden, hervorgeht.

Setzen wir demnach in (4) x statt e^{-x} und $\left(1+\frac{h}{x}\right)$ statt e^{-h}, so finden wir diese andere Formel

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{li}\,(x+h) &= \mathrm{li}\,(x) + \log\left(1 + \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\log x}\right) + \\ &+ \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s P(-\log x, s)}{s!} \left(\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\log x}\right)^s, \end{aligned} \right.$$

die Soldner[1]) zu verdanken ist; es scheint jedoch bisher unbeachtet geblieben zu sein, daß die Koeffizienten in (6) sich so einfach durch P-Funktionen ausdrücken lassen.

Aus der Formel von Bessel § 2, (12) finden wir nun weiter ohne Mühe diese andere Entwicklung

$$\frac{e^{-h(1+t)}-1}{1+t} = -\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s t^s}{s!} \cdot P(h, s+1),$$

aus der unter Anwendung der Formel von Mellin § 8, (10):

$$\Gamma(\nu)\, e^x Q(x+h, 1-\nu) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx} \cdot e^{-h(1+t)} t^{\nu-1}}{1+t}\, dt$$

und der elementaren Integralformel

$$\int_0^\infty e^{-tx} t^{\varrho-1} dt = \frac{\Gamma(\varrho)}{x^\varrho}, \quad \Re(x) \geqq 0, \quad \Re(\varrho) > 0$$

diese andere Reihenentwicklung:

$$(6)\quad Q(x+h, \nu) = Q(x,\nu) - e^{-x} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \binom{s-\nu}{s} \cdot \frac{P(h, s+1)}{x^{s+1-\nu}}$$

hervorgeht, in der $|h| < |x|$ vorauszusetzen ist.

---

1) Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante, p. 19; München 1809.

Die allgemeine Formel (6) ist offenbar neu.

Als ersten Spezialfall von (6) betrachten wir $\nu = 0$; demnach erhalten wir

$$(7) \qquad \mathrm{li}\,(e^{-x-h}) = \mathrm{li}\,(e^{-x}) + e^{-x} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{x^{s+1}} \cdot P(h, s+1).$$

Setzen wir in (7) $e^{-x} = y$, $e^h = z$, so folgt die Formel

$$(8) \qquad \mathrm{li}\left(\frac{y}{z}\right) = \mathrm{li}\,(y) - y \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{P(\log z, s)}{(\log y)^s},$$

welche von Bessel[1]) herrührt.

Weiter finden wir aus (6) für $\nu = \frac{1}{2}$ die andere speziellere Formel

$$(9) \quad L(\sqrt{x+h}) = L(\sqrt{x}) - \frac{e^{-x}}{2} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \binom{s-\frac{1}{2}}{s} \cdot \frac{P(h, s+1)}{x^{s+\frac{1}{2}}},$$

welche neu zu sein scheint.

Die allgemeine Formel (6) ist in der Tat höchst merkwürdig; denken wir uns nämlich unter ν eine feste gegebene Konstante, und h dem festen Intervall einer Tafel gleichgesetzt, so können wir ein für allemal die Koeffizienten

$$\binom{s-\nu}{s}, \quad P(h, s+1)$$

berechnen und brauchen dann nur in die Formel (6) statt x das letzte Argument der Tafel einzuführen, um den Funktionenwert des nächstfolgenden Arguments zu finden.

Wir bemerken noch, daß der genaue Ausdruck der Funktion $P(x, n)$ sich in § 2, (11) findet.

§ 36. Weitere Formeln von Soldner und Bessel.

Der Integrallogarithmus mit dem Argument x kann nicht in eine Potenzreihe von x entwickelt werden, wohl aber kann dies mit der Funktion

$$(1) \quad \mathrm{li}\,(1-x) = C + \log x + \log\left(\frac{\log(1-x)}{-x}\right) + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(\log(1-x))^s}{s!\,s}$$

geschehen.

---

1) Abhandlungen Bd. II, p. 335.

Eine Anwendung der Formel[1])

$$(2) \qquad \left(\frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha}\right)^x = 1 + x \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \psi_s(x+s) \cdot \alpha^{s+1}, \quad \alpha | < 1,$$

in der die ψ_n die Stirlingschen Polynome bedeuten, gibt in der Tat, nachdem nach x differentiiert und dann $x = 0$ gesetzt ist:

$$(3) \qquad \log\left(\frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha}\right) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \psi_s(s) \cdot \alpha^{s+1}, \quad |\alpha < 1.$$

Entwickeln wir demnach vermöge (2) jede Potenz rechter Hand in (1), so ergibt sich offenbar eine Reihenentwicklung von dieser Form

$$(4) \qquad \mathrm{li}(1-x) = \mathrm{li}(e^{-x}) + \sum_{s=1}^{s=\infty} A_s \cdot x^s, \quad |x| < 1,$$

in der der Kürze halber

$$(5) \qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s \psi_{n-s-1}(n-1)}{s!}$$

gesetzt worden ist.

Sollen noch die Stirlingschen Polynome aus (5) eliminiert werden, so ist dies unter Zuhilfenahme der bekannten Formeln[2])

$$(6) \qquad C_n^r = \frac{n!}{(n-r-1)!} \cdot \psi_{n-1}(n-1)$$

$$(7) \qquad \psi_n(n) = \frac{1}{2n+2} - \frac{\psi_n(0)}{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s B_s}{2s} \cdot C_{n+1}^{n-2s+1}$$

sehr leicht möglich; es ergibt sich nämlich

$$(8) \qquad A_n = \frac{1}{n} + \frac{\psi_n(0)}{n} + \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=1}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s B_s C_n^{n-2s}}{2s} + \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=1}^{s=n-1} \frac{(-1)^s}{s} \cdot C_n^{n-s};$$

hier bedeuten die B_n die Bernoullischen die C_n^r die Stirlingschen Zahlen. Es ist also identisch

$$(9) \qquad x(x+1)\cdots(x+n-1) = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} x,$$

während bekanntlich[3]) für $n \geqq 1$

$$(10) \qquad \psi_{2n}(0) = 0, \quad \psi_{2n-1}(0) = \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!}$$

zu setzen ist.

---

1) 2) 3) Handbuch der Theorie der Gammafunktion, pp. 74, 77, 78.

Soldner[1]) hat zuerst die Potenzreihe (4) angegeben ohne jedoch die allgemeine Natur ihrer Koeffizienten zu erkennen; die ersten dieser Koeffizienten sind von Bretschneider[2]) berechnet worden.

Bessel hat eine andere Reihenentwicklung für den Integrallogarithmus angegeben, in welcher ebenfalls die Stirlingschen Polynome als Entwicklungskoeffizienten auftreten. Bessel geht nämlich von der Identität

$$\log x = p \cdot \log\left(1 + \left(x^{\frac{1}{p}} - 1\right)\right)$$

aus; es ist dann wegen (2)

$$(11) \qquad \frac{1}{\log x} = \frac{1}{p\left(x^{\frac{1}{p}} - 1\right)} + \frac{1}{p} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \psi_s(s-1)\left(x^{\frac{1}{p}} - 1\right)^s;$$

da nun offenbar

$$\frac{x^{-\frac{p-1}{p}}}{p\left(x^{\frac{1}{p}} - 1\right)} + \frac{1}{p} \cdot \sum_{s=1}^{s=n-1} x^{\frac{s}{p}-1} = \frac{1}{p\left(x^{\frac{1}{p}} - 1\right)}$$

sein muß, so ergibt sich aus (11)

$$(12) \quad \mathrm{li}(x) = \log\left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right) + \sum_{s=1}^{s=p-1} \frac{x^{\frac{s}{p}}}{s} + \frac{1}{p} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \psi_s(s-1) \cdot \int_0^x \left(x^{\frac{1}{p}} - 1\right)^s dx,$$

wo keine Konstante hinzuzufügen ist, weil die beiden Seiten dieser Formel für $x = 0$ verschwinden.

Es ist nun weiter

$$\int_0^x \left(x^{\frac{1}{p}} - 1\right)^n dx = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s \binom{n}{s} x^{\frac{n-s}{p}+1}}{1 + \frac{n-s}{p}},$$

woraus auch

$$(13) \qquad \frac{1}{p} \cdot \int_0^x \left(x^{\frac{1}{p}} - 1\right)^n dx = \frac{x}{p} \cdot \Delta^n f(0), \; f(s) = \frac{x^{\frac{s}{p}}}{1 + \frac{s}{p}}$$

folgt, so daß sich die Formel (12) in diese einfachere Form

$$(14) \quad \mathrm{li}(x) = \log\left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right) + \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{x^{\frac{s}{p}}}{s} + \frac{x}{p} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \psi_s(s-1) \cdot \Delta^s f(0)$$

bringen läßt, und dies ist genau die Besselsche Formel.[3])

---

1) Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante, p. 23; München 1809.

2) Journal für Mathematik Bd. 17, p. 258; 1837.

3) Abhandlungen Bd. II, p. 333, (1812).

§ 37. Tafeln für $\mathrm{li}(x)$, $\mathrm{ci}(x)$ und $\mathrm{si}(x)$.

Die erste numerische Tafel über den Integrallogarithmus ist von Soldner[1]) berechnet worden und zwar unter Zuhilfenahme der Reihenentwicklung § 35, (5) und der Kettenbruchentwicklung § 17, (10). Diese Methode ist eine äußerst mühsame gewesen und es muß die Ausdauer Soldners bewundert werden, um so mehr, da seine Tafel dennoch sehr sorgfältig und genau ist.

Der Hauptteil der Soldnerschen Tafel gibt die Werte von $\mathrm{li}(x)$ von $x = 0$ bis $x = 1$ für das Intervall 0,01 und mit 7 Dezimalstellen an; weiter finden sich zahlreiche Werte von $\mathrm{li}_1(x)$ für ganze positive Werte von x ebenfalls mit 7 Dezimalstellen ausgerechnet. Soldner gibt eine Wurzel der Gleichung

$$\mathrm{li}_1(x) = 0$$

angenähert durch

$$x = 1{,}4513692346$$

an.

Die Soldnersche Tafel ist später von de Morgan[2]) abgedruckt worden.

Kurz nachher hat Bessel[3]) seine Formel § 35, (8) angewendet, um $\mathrm{li}_1(x)$ für verschiedene, sehr große, positive ganze Werte von x zu berechnen; über diese Resultate haben wir in § 39 näheres zu berichten.

Gauß[4]) hat seine allgemeine Methode zur angenäherten Quadratur auf einen Wert des Integrallogarithmus angewendet und zwar unter Benutzung der folgenden Formel

$$\mathrm{li}_1(e^{x+h}) - \mathrm{li}_1(e^x) = \int_x^{x+h} \frac{e^t}{t}\, dt \tag{1}$$

welche als eine unmittelbare Folgerung der Integraldarstellung § 4, (1) angesehen werden kann.

Setzen wir in (1) e^x statt x und $1 + \frac{h}{x}$ statt e^h, so gibt die Transformation $e^t = z$ unmittelbar diese andere Integraldarstellung

$$\mathrm{li}_1(x+h) - \mathrm{li}_1(x) = \int_x^{x+h} \frac{dz}{\log z}. \tag{2}$$

---

1) Abhandlungen Bd. II, p. 333, (1812).
2) Differential and integral calculus, p. 662; 1839.
3) Abhandlungen Bd. II, pp. 327, 339.
4) Comment. Gott. Bd. 3, p. 74—76; (1814—1815); 1816.

Es leuchtet übrigens ein, daß die Formeln (1) und (2) nur Umschreibungen der in § 35 gegebenen sind; setzen wir nämlich in (1) $t = z + h$, dann folgt

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{li}_1(e^{x+h}) - \mathrm{li}_1(e^x) = e^x \cdot \int_0^h \frac{e^t}{t+x}\, dt.$$

Denken wir uns nun $|x| > |h|$, so dürfen wir in (3)

$$\frac{1}{x+t} = \frac{1}{x} - \frac{t}{x^2} + \frac{t^2}{x^3} - \cdots$$

einführen und dadurch folgt aus (3) eben die Formel § 35, (8).

Der nächste Berechner des Integrallogarithmus war Bretschneider. Erstens[1]) gab er die beiden Zahlenwerte an:

$$\mathrm{li}\left(\frac{1}{e}\right) = -\,0,\,21938\;39343\;95520\;27366\;5$$

$$\mathrm{li}_1(e) = \quad 1,\,89511\;78163\;55936\;75547\;8;$$

sie sind jedoch früher von Soldner[2]), allerdings nur mit 10 Dezimalen berechnet worden.

Zweitens berechnete Bretschneider[3]) die Zahlenwerte von

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{li}_1(e^x),\ \mathrm{li}(e^{-x}),\ \mathrm{ci}(x),\ \mathrm{si}(x) + \frac{\pi}{2}$$

für alle ganzzahligen Werte von $x = 1$ bis $x = 10$ und zwar mit 20 Dezimalstellen; diese kleine Tafel ist kurz nachher von Schlömilch[4]) wieder abgedruckt worden.

Drittens hat endlich Bretschneider[5]) eine ausführlichere Tafel berechnet, welche dieselben Funktionen (4) von $x = 0$ bis $x = 1$ mit dem Intervall 0,01 und von $x = 1$ bis $x = 7{,}5$ mit dem Intervall 0,1 und sämtlich mit 10 Dezimalstellen angibt.

Diese Tafel ist unter Anwendung der Reihenentwicklungen § 1, (5), (7) und § 3, (3), (4) hergestellt worden.

Dieselbe Methode wandte Glaisher[6]) bei der Berechnung seiner noch ausgedehnteren Tafel über die Zahlenwerte der Funktionen (4) an. Glaisher gab erstens die Zahlenwerte der obengenannten

1) Journal für Math. Bd. 7, p. 285; 1837.

2) Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante, p. 42; München 1809.

3) Grunert Archiv Bd. 8, p. 27—34; 1843.

4) Analytische Studien Bd. II, p. 196—197; Leipzig 1848.

5) Programm. Realgymn. Gotha, Ostern 1859. Zeitschrift für Math. und Physik Bd. 6, p. 127—139; 1861.

6) Phil. Transact. of London Bd. 160, p. 367—387; 1870.

Riemann[1]) hat die Ursache der relativen Übereinstimmung der beiden Zahlenwerte $\mathrm{li}_1(x)$ und $\pi(x)$ entdeckt; wird nämlich

$$f(x) = \pi(x) + \tfrac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \tfrac{1}{3}\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \cdots$$

gesetzt, so ist nach Riemann

$$f(x) = \mathrm{li}_1(x) - \sum_{s=1}^{s=\infty}{}'\left(\mathrm{li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha_s i}\right) + \mathrm{li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha_s i}\right)\right) + \\ + \int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\cdot\frac{dx}{x\log x} - \log 2,$$

wo die $\frac{1}{2} \pm \alpha_s i$ sämtliche Wurzeln der Gleichung

$$\zeta(x) = 0$$

bedeuten; über diese Formel vergleiche man auch die Untersuchungen von Genocchi[2]) und Gram[3]).

1) Werke, p. 151.
2) Annali di Mat. Bd. 3, p. 52.
3) loc. cit., p. 208; 1884.

Literaturverzeichnis.

A. Theorie und Tafeln.

Amstein, H.: Note sur le logarithme-intégral. *Bull. de société vaudoise* Bd. 31, No. 119; 1895.[1])

Arndt, F.: 1) Über einige bestimmte Integrale. *Grunert Archiv* Bd. 10, p. 225—232; 1847.

2) Über einige bestimmte Integrale, welche sich auf die beiden Integrale $\int_{\infty}^{p} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$, $\int_{\infty}^{p} \frac{\cos x}{x}\,dx$ zurückführen lassen. *Grunert Archiv* Bd. 10, 233—240; 1847.

3) Über eine gewisse Klasse bestimmter Integrale, bei welchen die Funktion unter dem Integralzeichen für einen Wert der Veränderlichen zwischen den Integrationsgrenzen unendlich wird. *Grunert Archiv* Bd. 10, p. 240—246; 1847.

4) Über die Integrale $\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-bx}}{x^2 - a^2}\,dx$, $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(bx)}{a^2 - x^2}\,dx$. *Grunert Archiv* Bd. 10, p. 247—250; 1847.

Beau, O.: Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourierschen Integrale, pp. 34—37, 57—60; Halle 1885.

Beez, R.: Beiträge zur Theorie des Integrallogarithmus. *Grunert Archiv* Bd. 19, p. 419—441; 1852.

Bellavitis, G.: Tavole numeriche de logarithmo-integrale ossio dell' esponentiale-integrale e di altri integrali euleriani. *Mem. d'Istituto veneto* Bd. 18, p. 125—162; 1875.

Bessel, F. W.: 1) Über das Integral $\int \frac{dx}{\log x}$. *Monatl. Korrespondenz* Bd. 22, p. 192; 1810. *Abhandlungen* Bd. II, p. 326—327.

2) Aus einem Schreiben an Lindenau. *Monatl. Korrespondenz* Bd. 23, p. 192; 1811. *Abhandlungen* Bd. II, p. 327—328.

3) Untersuchung der durch das Integral $\int \frac{dx}{\log x}$ ausgedrückten transzendenten Funktion. *Königsberger Archiv* Bd. 1; 1812. *Abhandlungen* Bd. II, p. 330—342.

1) Zitat von Gutknecht; die Arbeit ist im Jahrb. über die Fortschr. der Math. nicht erwähnt.

Bessel und Gauß: Briefwechsel.

Bessel und Olbers: Briefwechsel.

Bidone, G.: Recherches sur la nature de la transcendante $\int \frac{dz}{\log z}$. *Mém. de Turin* Bd. 16, p. 19—84; 1805—1808.

Bierens de Haan, D.: 1) Note sur une mèthode pour la réduction d'intégrales définies et sur son application à quelques formules spéciales. *Verhandelingen der Akad. Amsterdam* Bd. 2, 54 S.; 1855.

2) Réduction des intégrales définies générales $\int_0^\infty F(x) \cdot \frac{\cos(px)dx}{q^2+x^2}$, $\int_0^\infty F(x) \cdot \frac{\sin(px)dx}{q^2+x^2}$ et application de ces formules au cas, que $F(x)$ a un facteur de la forme $(\sin x)^\alpha$ ou $(\cos x)^\alpha$. *Verhandelingen der Akad. Amsterdam.* Bd. 5, 117 S.; 1857.

3) Tables d'intégrales définies. 1858; 2. Aufl. 1867.

Bretschneider, C. A.: 1) Theoriae logarithmi integralis lineamenta nova. Journal für Mathematik Bd. 17, p. 257—285; 1837.

2) Berechnung der natürlichen Logarithmen, sowie mehrerer anderer mit ihr zusammenhängenden Zahlenwerte. *Grunert Archiv* Bd. 3, p. 27—34; 1843.

3) Über die Berechnung des Integrallogarithmus und einiger mit ihm zusammenhängenden anderen Funktionen. *Programm Realgymn. Gotha,* Ostern 1859, *Zeitschrift für Math. und Physik* Bd. 6, p. 127—139; 1861.

Burgess, J.: On the definite integral $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} dt$ with extended tables of values. *Edinb. Transactions* Bd. 39 II, No. 9, 65 S.; 1898.

Buzengeiger in *Monatl. Korrespondenz* Bd. 26, p. 285.

Cluso, T in *Mem. della Società italiana* Bd. 12, p. 268; 1805.

Dawson, H. G.: On the numerical value of $\int_0^h e^{x^2} dx$. *Lond. Math. Soc. Proceedings* Bd, 29, p. 519—522; 1898.

Euler, L.: Institutiones calculi integralis Bd. I, p. 125; 1768.

Enneper, A.: Über einige bestimmte Integrale, *Zeitschrift für Math. und Physik* Bd. 6, p. 405—407; 1861.

Fenolio, J. D.: Essai sur le sinus intégral. Turin[1]).

Gauß, C. F.: Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. *Comment Gotting* Bd. 3, p. 39—76; 1814—1815 (1816).

Gauß und Bessel s. Bessel und Gauß.

Glaisher, J. W. L.: Tables of the numerical values of the sine-integral, cosine-integrale and exponential-integral. *Phil. Transactions of London* Bd. 160, p. 367—387; 1870.

---

1) Zitat von Schlömilch in Zeitschr. für Math. und Phys. Bd. 2. (Literaturzeitung.)

2) On a class of definite integrals. *Phil. Magazine* (4) Bd. 42, pp. 294—302; 421—436; 1871.

3) On the reduction of functional integrals. *Messenger* (2) Bd. 1, p. 153—163; 1872.

4) Solution of a question. *Educal Times* Bd. 17, p. 45—47; 1872.

5) On certain definite integrals involving the exponential-integral. *Quarterly Journal* Bd. 18, p. 370—377; 1882.

6) Formulae for the rth integral of a Legendrian-Coefficient and of the logarithm-integral. *Messenger* (2) Bd. 12, p. 120—128; 1882.

Gutknecht, A.: Integrallogarithmus. *Diss.* Bern 1903.

Hölder, O.: Über eine Funktion, welche keiner algebraischen Funktionalgleichung genügt. *Göttinger Nachrichten* 1887, p. 662—676.

Jacobi, C. G. J.: De fractione continua, in quam integrale $\int e^{-x^2} dx$ evolvere licet. *Journal für Mathematik* Bd. 12, p. 346—347; 1834.

Kämpfe, B.: Tafel des Integrals $\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0 e^{-t^2} dt$. *Wundt's Phil. Studien* Bd. 9, 4 S. 1893.

Kroncker, L.: Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale. Herausgegeben von Netto. Leipzig, Teubner 1894; p. 199—214.

Lacroix, S. F.: Traité du calcul différentiel et du calcul intégral Bd. II, pp. 87—88, 91—92, Bd. III, p. 512—528; Paris 1816, 1819.

Laguerre, E.: 1) Sur l'intégrale $\int_0^x z^n \cdot e^{-\frac{z^2}{2}+zx} dt$. *Bull. Soc. Math. de France* Bd. 7, p. 12—16; 1879. Werke Bd. I, p.

2) Sur l'integrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$. *Bull. Soc. Math. de France* Bd. 7, p. 72—81; 1879. Werke Bd. I, p. 428—437.

Landsberg, G.: Sur un nouveau développement de la fonction gamma, qui contient la série de Stirling et celle de Kummer. *Mém. Belg. Couronnés* Bd. 55, 28 S.; 1897.

Laplace, P. S.: Mécanique céleste. Bd. IV, live 10.

Lindman, C. F.: Om några integraler I. *Öfversigter der Stockholmer Akad.* 1892, p. 5—19.

Lindstedt, A.: Zur Theorie der Fresnelschen Integrale. *Wiedemann Annalen* (2) Bd. 17, p. 720—725; 1882.

Lommel, E. v.: Zur Theorie der Besselschen Funktionen. *Mathematische Annalen* Bd. 16, p. 183—208; 1880.

Markoff, A. A.: Table des valeurs de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$. St. Petersburg und Leipzig; 1888.

Mascheroni, L.: Adnotationes ad Euleri calculum integralem. Ticini 1790—1792.

Meissel, E.: Beiträge zur Theorie der Reihen. *Programm* Kiel 1875. *Grunert Archiv* Bd. 60, p. 337—353; 1876.

Meyer, A.: Exposé élémentaire de la théorie des intégrales définies. *Mém. de Liège* Bd. 7, p. 389—394; 1852.

Nielsen, N.: 1) Om Definitionen for $\mathrm{li}(e^{-x})$. *Nyt Tidsskrift for Math.* Bd. 7B, p. 27—29; 1896.

2) Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig, Teubner 1904.

3) Sur une intégrale définie. Math. Ann. Bd. 59, p. 89—102; 1904.

4) Notiz über den Integrallogarithmus. *Monatshefte für Math. und Physik* Bd. 16, p. 7—10; 1905.

5) Bestimmte Integrale mit der Prymschen Q-Funktion. Monatshefte Bd. 17, p. 47—58; 1906.

6) Sur le développement en fraction continue de la fonction Q de M. Prym. *Accademia dei Lincei Rend.* (5) Bd. 15, p. 98—104; 1906.

Olbers und Bessel s. Bessel und Olbers.

Opitz, H. R. G.: 1) Die Kramp-Laplacesche Transzendente und ihre Umkehrung. *Programm Königsstädt. Realgymn.* Berlin 1900, 29 S.

2) Über die Auflösung der transzendenten Gleichung $\int_0^x e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. *Arch. der Math. und Physik* (3) Bd. 5, p. 42—46; 1903.

Oumoff, N. A.: 1) Die geometrische Bedeutung der Fresnelschen Integrale. *Odessa Ges.* Bd. 6, p. 57—86; 1885 (russisch).

2) Interprétation géométrique des intégrales de Fresnel. *Journal de Phys.* (3) Bd. 6, p. 281—289; 1897.

Pendlebury, R.: 1) Note on some definite integrals. *Phil. Mag.* (4) Bd. 4, p. 437—440; 1871.

2) On the squares of transcendents. *Messenger* (2) Bd. 1, p. 131—135; 1872.

Plana, J.: Eclaircissements sur la théorie de l'intégrale $\int \frac{dx}{\log x}$. *Mém. de Turin* Bd. 12, p. 145—257; 1812.

Popov: Sur la valeur de l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-ax} \cdot e^{(x^2+bx)i}\,dx$. *Bull. Phys. Math. St. Pétersbourg* Bd. 15, p. 307—313; 1857.

Raabe, J, L.: Die Differential- und Integralrechnung. Bd. I, p. 347—375; Zürich 1839.

Radau in *Annales de l'Observatoire de Paris* Bd. 18.

Schendel, L.: Die Beroullischen Funktionen und das Taylorsche Theorem. Jena 1876.

Schlömilch, O.: 1) Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale. Jena 1843.

2) Über einige merkwürdige bestimmte Integrale. *Grunert Archiv* Bd. 5, p. 204—212; 1844.

3) Note sur quelques intégrales définies. *Journal für Math.* Bd. 33, p. 316—324; 1846.

4) Sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{d\Theta}{\Theta^2 + a^2} \cdot e^{-x\Theta}$. *Journal für Math.* Bd. 33, p. 325—328; 1846.

5) Bemerkung zur Theorie des Integrallogarithmus. *Grunert Archiv* Bd. 9, p. 5—8; 1847.

6) Zur Theorie des Integrallogarithmus. *Grunert Archiv* Bd. 9, p. 309—313; 1847.

7) Analytische Studien. Leipzig 1848.

8) Über den Integralsinus und Integralkosinus. *Grunert Archiv* Bd. 11, p. 389—395; 1848.

9) Über eine unendliche Reihe. *Zeitschr. f. Math. und Phys.* Bd. 3, p. 180—187; 1858.

10) Über eine transzendente Funktion. *Zeitschr. für Math. und Phys.* Bd. 4, p. 433—437; 1859.

11) Über Fakultätenreihen. *Leipziger Berichte* Bd. 11, p. 109—137; 1859. *Zeitschr. für Math. und Phys.* Bd. 4, p. 390—415; 1859.

12) Über den Integralsinus und den Integralkosinus. *Zeitschr. für Math. und Phys.* Bd. 5, p. 294—296; 1860.

13) Über zwei bestimmte Integrale. *Zeitschr. für Math. und Phys.* Bd. 10, p. 76—80; 1865.

14) Über einige allgemeine Integralformeln. *Zeitschr. für Math. und Phys.* Bd. 10, p. 152—155; 1865.

15) Über einige Integrale von allgemeiner Form. *Zeitschr. für Math. und Phys.* Bd. 18, p. 315—319; 1879.

16) Kompendium der höheren Analysis Bd. II; 1879.

Schols, C. M.: De half-convergente reeks for bereckning von de integral $\psi(z) = e^{z^2} \cdot \int_z^\infty e^{-z^2} dz$. *Versl. en Meded.* (3) Bd. 2, p. 40—55. 1885. *Ann. de l'Ecole polytechn.* Delft Bd. 1, p. 213—227; 1885.

Soldner, J.: 1) Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante. München 1809.

2) Brief nach Lindenau. *Monatl. Korrespondenz* Bd. 23, 1811. Abgedruckt als Note in Bessel: Abhandlungen Bd. II, p. 327—330.

v. Sonin, N.J.: Über den Grad von Genauigkeit der Bestimmung der Zahlenwerte der Integrale. *Petersburger Abhandl.* Bd. 69, p. 1—30; 1892.

Stenberg: Tabulae logarithmi integralis I—III. Malmö 1861, 1867, 1871.

Stieltjes, T. J.: 1) Recherches sur quelques séries semi-convergentes. *Annales de l'Éc. Normale* (3) Bd. 3, p. 201—258; 1886.

2) Note sur le développement de l'integrale $\int_0^a e^{x^2} dx$. *Acta Mathematica.* Bd. 9, p. 167—176; 1886.

Svanberg, A. F.: Sur les intégrales définies $\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x} x^{n-1}}{1+x^2} dx$, $\int_0^\infty \frac{\cos(\beta x) x^{n-1}}{1+x^2} dx$, $\int_0^\infty \frac{\sin(\beta x) x^{n-1}}{1+x^2} dx$. *Journal de Math.* Bd. 11, p. 197—200; 1846.

Vallier, E.: Sur l'intégrale eulérienne incomplète de deuxième espèce et sur l'integrale indéfinie des fonctions précédantes. *Comptes rendus* Bd. 132, p. 1391—1395: 1901.

Walton, W.: On the expression of a certain function in the form of a series. *Quarterly Journal* Bd. 10, p. 87—93; 1869.

Whittaker, E. T.: An expression of certain known functions as generalized hypergeometric functions. *American Math. Soc. Bulletin* (2) Bd. 10, p. 125—134; 1903.

Winckler, A.: Über die Reduktion doppelter Integrale auf Quadraturen. *Journal für Math.* Bd. 45, pp. 110—111, 147—148, 151; 1853.

B. Zahlentheoretische Anwendungen.

Bachmann, P.: Die analytische Zahlentheorie. Leipzig, Teubner 1894.

Franel, J.: Sur la fonction $\xi(t)$ de Riemann et son application à l'arithmétique. Züricher Naturf.-Ges. Bd. 41 II, p. 7—19; 1896.

Genocchi, A.: Formole per determinare quanti siano i numeri primis fino ad un dato limite. *Annali di Metematica* Bd. 3.

Gram, J. P.: Undersögelser angaaende Mängden af Primtal under en given Gränse. Gekrönte Preisschrift. *Afhandlinger der Kopenhagener Akad.* (6) Bd. 2, p. 183—308; 1884.

Hargreave, C. J.: 1) Analytical researches concerning numbers. *Phil. Mag.* (3) Bd. 35, p. 36—53: 1849.

2) On the law of prime numbers. *Phil. Mag.* (4) Bd. 8, p. 114—123. 1854.

Holmgreen, E.: On primtalens fördeling. *Stockholmer Öfversigter* Bd. 59, p. 221—225; 1902.

Johnson, W. W.: On the distribution of primes. *Analyst.* Bd. 2, p. 9—22; 1875.

v. Koch, H.: 1) Sur la distribution des nombres premiers. *Comptes rendus* Bd. 130, p. 1243—1246; 1900. *Acta Mathematica* Bd. 24, p. 159—182; 1900.

2) Sur la distribution des nombres premiers. *Congrès intern. Math. Paris* 1900, p. 195—198.

3) Über die Riemannsche Primzahlfunktion. *Math. Annalen* Bd. 55, p. 441—464; 1901.

Landau, E.: 1) Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers. *Bulletin Soc. Math. de France* Bd. 28, p. 25—38; 1900.

2) Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes. *Math. Annalen* Bd. 56, p. 645—670; 1903.

3) Über die Primzahlen einer arithmetischen Progression. *Wiener Berichte* Bd. 112, p. 493—535; 1903.

v. Mangoldt, H.: Über eine Anwendung der Riemannschen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze. *Journal für Math.* Bd. 119, p. 65—71; 1898.

Mertens, F.: Über eine zahlentheoretische Funktion. *Wiener Berichte* Bd. 106, p. 761—830; 1897.

Phragmèn, E.: 1) Sur le logarithme-intégral et la fonction $f(x)$ de Riemann. *Stockholmer Öfversigter* Bd. 48, p. 599—616; 1891.

2) Über die Berechnung der einzelnen Glieder der Riemannschen Primzahlformel. *Stockholmer Öfversigter* Bd. 48, p. 721—744; 1891.

3) Sur une loi de symétrie relative à certaines formules asymptotiques. *Stockholmer Öfversigter* Bd. 58, p. 181—282; 1901.

Riemann, B.: Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe. *Berliner Monatsberichte* 1859. *Werke* p. 145—155.

Scheibner, W.: Über die Anzahl der Primzahlen unter einer beliebigen Grenze. *Zeitschr. für Math. und Phys.* Bd. 5, p. 232—252; 1860.

Schmidt, F.: Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze. *Math. Annalen* Bd. 57, p. 195—204; 1903.

Tschebytscheff, S. L.: 1) Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. *Journal de Math.* Bd. 17, p. 341—365; 1852.

2) Über die Residuen, welche die angenäherten Werte der Integrale geben. *Petersburger Abhandlungen* Bd. 55, p. 1—50; 1887 (russisch).

de la Vallée-Poussin, C.: Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. *Belg. Mém. Couronnés* Bd. 59, S. 74; 1899.

C. Anwendungen auf Wahrscheinlichkeitsrechnung.[1])

Bachelier, L.: Théorie mathématique du jeu. *Ann. de l'École Normale* (3) Bd. 18, p. 143—210; 1901.

Bertrand, J.: 1) Remarque. *Comptes rendus* Bd. 81, p. 458—459; 1875.

2) Addition à la Note relative au théorème de M. Bienaymé. *Comptes rendus* Bd. 81, p. 491—492; 1875.

3) Note sur un théorème du calcul des probabilités. *Comptes rendus* Bd. 114, p. 701—703; 1892.

Bienaymé: Application d'un théorème nouveau du calcul des probabilités. *Comptes rendus* Bd. 81, p. 417—423; 1875.

Bruns, H.: Über die Darstellung von Fehlergesetzen. *Astron. Nachr.* Bd. 143, p. 329—340; 1897.

Dirichlet, P. G. Lejeune: Démonstration du théorème de Bernoulli. *Werke* Bd. II, p. 354—357.

Edgeworth, F. Y.: On the law of error and the elimination of chance. *Phil. Mag.* (5) Bd. 21, p. 308—324; 1886.

Eggenberger, J.: 1) Beiträge zur Darstellung des Bernoullischen Theorems, der Gammafunktion und des Laplaceschen Integrals. *Diss.* Bern 1889. *Berner Naturf.-Ges.* 1893, p. 110—182.

2) Zur Darstellung des Bernoullischen Theorems in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Zeitschr. für Math. und Phys.* Bd. 45, p. 43—51; 1900.

Gazot, E.: Formule pratique simple de la probabilité d'un erreur, étant donnée sa grandeur en fonction de l'écart probable. *Revue d'Astron.* Bd. 57, p. 70—73; 1900.

Liapounoff, A.: 1) Sur une proposition de la théorie des probabilités. *St. Petersburger Bulletin* (5) Bd. 13, No. 4, p. 359—386; 1900.

---

1) Nicht angeführt sind hier Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Überhaupt darf diese Abteilung C auf Vollständigkeit keinen Anspruch machen.

2) Sur un théorème du calcul des probabilités. *Comptes rendus* Bd. 132, p. 126—127; 1900.

3) Une propoition générale du calcul des propabilités. *Comptes rendus* Bd. 132, p 814—815: 1900.

Lüroth, J.: Vergleichung von zwei Werten des wahrscheinlichen Fehlers. *Astron. Nachr.* Bd. 87, p. 209—220; 1875.

Mansion, P.: 1) Sur le théorème de Jacques Bernoulli. *Bruxelles Soc. scient.* Bd. 22A, p. 3—4; 1898.

2) Démonstration du théorème de Jacques Bernoulli. Sur une intégrale considérée en calcul des probabilités. *Bruxelles Soc. scient.* Bd. 26B, p. 191—214; 1902.

Monro, C. J.: Note on the inversion of Bernoullis theorem in probabilities. *Lond. Math. Soc. Proceedings* Bd. 5, p. 74—78; 1874.

d'Ocagne, M.: Sur une application de la théorie de la probabilité des erreurs aux nivellements de haute précission. *Comptes rendus* Bd. 120, p. 717—720; 1895.

Pritz, H.: Mémoire sur les principes fondamentaux de l'application du calcul des probabilités aux question d'artillerie. *Revue d'Artill.* Bd. 32, pp. 213—240, 313—343; 1888.

Seeliger, H.: 1) Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über die Verteilung zufälliger Fehler. *Astron. Nachr.* Bd. 97, p. 289—304; 1880.

2) Über die Verteilung der nach einer Ausgleichung übrig bleibenden Fehler. *Münchener Berichte* 1899, p. 3—21.

Tschebytscheff, P. L.: Zwei Theoreme über die Wahrscheinlichkeiten. *Petersburger Abhandlungen* 1887 (russisch).

Walton, W.: On the expression of a certain function in the form of a series. *Quarterly Journal* Bd. 10, p. 87—93; 1869.

Weinberg, B.: Über die Wahrscheinlichkeit einer Fehlerverteilung. *Astron. Nachr.* Bd. 153, p. 193—204; 1900.

D. Physikalische Anwendungen.

Abria: Sur la diffraction de la lumière. *Journal de Math.* Bd. 4, p. 248—260; 1839.

Beez, R.: Über Hydrodiffusion in begrenzten zylindrischen Gefäßen. *Zeitschr. für Math. und Phys.* Bd. 10, p. 358—389; 1865.

Boussinesq, J.: Problème du refroidissement d'un mur par rayonnement, raméné au cas plus simple où le refroidissement aurait lieu par contact. *Comptes rendus* Bd. 130, p. 1731—1736; 1900.

Bruns, H.: Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. *Leipziger Berichte* Bd. 48, p. 164—227; 1891.

Carlslaw, H. S.: Some multiform solutions of the partial differential equations of physical mathematics and their applications. *Londoner Math. Soc. Proceed.* Bd. 30, p. 121—161; 1899.

Cauchy, A. L.: 1) Troisième et quatrième lettre à M. Libri sur la théorie de la lumière. *Comptes rendus* Bd. 2, p. 455—461; 1836.

2) Note sur la diffraction de la lumière. *Comptes rendus* Bd. 15, pp. 554—556, 573—578; 1842.
3) Mémoire sur les phénomènes des ombres et de la diffraction. *Comptes rendus* Bd. 15, p. 605—618; 1842.

Chwolson, O.: Grundzüge einer mathematischen Theorie der inneren Diffusion des Lichtes. *St. Petersb. Bull. Mél. phys. et chim.* Bd. 13, p. 83—118; 1889. *Exner Rep.* Bd. 26, pp. 364—377, 385—405; 1889.

Césaro, E.: Sur la courbe représentative des phénomènes de diffraction. *Comptes rendus* Bd. 110, p. 1119—1123; 1890.

Cournu, A.: Études sur la diffraction, méthode géométrique pour la discussion des problèmes de diffraction. *Comptes rendus* Bd. 78, p. 113—117; 1874.

Fresnel, A.: Mèmoire sur la diffraction de la lumière. *Mèm. de l'Institut de France* Bd. 5, p. 339—475 (1821—1822); 1826.

Gilbert, Ph.: Recherches analytiques de la diffraction de la lumière. *Mèm. couronnés et de sav. étr. Bruxelles* Bd. 31, 1863; 52 S.

Grüneisen, A.: Über die Bestimmung des metallischen Wärmeleitvermögens und über sein Verhältnis zur elektrischen Leitfähigkeit. *Ann. der Physik* (4) Bd. 3, p. 43—74; 1900.

Hansemann und Kirchhoff s. Kirchhoff und Hansemann.

Hausdorff, F.: Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. *Leipziger Berichte* Bd. 48, p. 481—566; 1891.

Indra, A.: Über die Bestimmung der Temperatur einer veränderlichen Wärmequelle in einer bestimmt gegebenen Zeit. *Wiener Berichte* Bd. 105, p. 822—838; 1896.

Jäger, G.: Zur Theorie der Dampfspannung. *Wiener Berichte* Bd. 99, p. 679—682; 1890.

Kirchhoff und Hansemann: Über die Leitungsfähigkeit des Eisens für Wärme. *Poggendorff Annalen* (2) Bd. 9, p. 1—47; 1880.

Knochenhauer, K. W.: 1) Über die Örter der Maxima und Minima des gebeugten Lichtes nach den Fresnelschen Beobachtungen. *Poggendorff Annalen* Bd. 41, p. 103—110; 1897.
2) Die Undulationstheorie des Lichtes. Berlin 1839.

Kramp: Analyse des réfractions astronomiques et terrestres. Straßburg 1799.

v. Lommel, E.: 1) Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. *Münchener Abhandlungen* Bd. 15, p. 529—664; 1886.
2) Die Photometrie der diffusen Zurückwerfungen. *Wiedemann Annalen* (2) Bd. 38, p. 473—502; 1889.
3) Theorie der Dämmerungsfarben. *Münchener Abhandlungen* Bd. 19, p. 449—508; 1899.

del Lungo, C.: Della densità dei liquidi e dei vapori saturi come funzione della temperatura. *Roma Accad. dei Lincei Rend.* (5) Bd. 7, p. 353—358; 1898.

Mascart: Sur la théorie de la propagation de l'électricité dans les conducteurs. *Comptes rendus* Bd. 86, p. 965—968; 1878.

Meyer, O. E.: Über die Reibung der Flüssigkeiten. *Journal für Math.* Bd. 59, p. 229—303; 1861.

v. Oppolzer, T.: Vorläufige Mitteilung über eine neue Refraktionsformel. *Astron. Nachr.* Bd. 89, p. 365; 1877.

Lord Rayleigh: The form of standing waves on the surface of running water. *Lond. Math. Soc. Proceed.* Bd. 15, p. 69—78; 1884.

Scholoff, A.: Zur Theorie der Polarisationsströme. *Ges. d. Naturkunde Moskau* Bd. 8 II, p. 22—43; 1890 (russisch).

Stefan, J.: Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung. *Wiener Berichte* Bd. 98, p. 473—484. 1889.

Struve, H.: Fresnels Interferenzerscheinungen theoretisch und experimentell bearbeitet. *Diss.* Dorpat 1881. *Wiedemann Annalen* (2) Bd. 15, p. 49—80; 1882.

Voigt, W.: Zur Theorie der Beugung ebener inhomogener Wellen an einem geradlinig begrenzten unendlichen und absolut schwarzen Schirm. *Göttinger Nachrichten* 1899, p. 1—33.

van der Waals, J. D.: Thermodynamische theorie der capillarität in de onderstelling von continue dichtheidsverandering. *Amsterdamer Verh.* Bd. 1, No. 8, p. 1—56; 1892.

Weber, H.: 1) Über den Temperaturausgleich zwischen zwei sich berührenden heterogenen Körpern. *Göttinger Nachrichten* 1893, p. 722—730.

2) Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Bd. I, II. Braunschweig 1900, 1901.

Weber, H. F.: Die wahre Theorie der Fresnelschen Interferenzerscheinungen. *Poggendorff Annalen* (2) Bd. 8, p. 407—444. *Naturf. Ges. Zürich* Bd. 24, p. 33—76; 1879.

v. Wrangel, F.: Über eine in oceanographischen Werken vorkommende falsche Formel. *Wiedemann Annalen* Bd. 65, p. 238—240; 1898.

Alphabetisches Register.

Autorennamen in Verbindungen wie z. B. Neumannsche Reihen werden hier im Register nicht für sich zitiert. Unter „Funktion" findet man die spezielleren Funktionen aufgezeichnet, welche im Buche vorkommen.

Arndt, F. 6. 8. 65.
Asymptotische Reihe für ci (x) 38.
— li (e^{-x}) 37.
— si (x) 38.
— $C(x)$ 38.
— $L(x)$ 37.
— $Q(x, 1-\nu)$ 37.
— $S(x)$ 38.

Beau, O. 24.
Bellavitis, G. 90.
Bernoullische Zahlen 86.
Bessel, F. W. 5. 6. 8. 9. 10. 34. 39. 73. 83. 84. 85. 87. 88.
Bierens de Haan, D. 35.
Binet, J. 70.
Bretschneider, C. A. 8. 36. 87. 89.
Burgess, J. 91.

Dawson, H. G. 91.
Differentialquotient von ci (x) 11.
— li (e^{-x}) 11.
— si (x) 11.
— $C(x)$ 12.
— $L(x)$ 12.
— $S(x)$ 12.
Dilogarithmus 70.
Dini, U. 48. 57.
Dirichlet, P. G. Lejeune 69.
Diskontinuierliche Integrale 50. 51. 54.

Enneper, A. 32.
Euler, L. 3. 20. 21.
Eulersche Konstante 2. 3. 4. 5. 7. 9. 10. 11. 16. 19. 25. 26. 27. 56. 60. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 72. 78. 79. 80. 81. 83. 85.
Eytelwein, J. A. 9.

Fakultätenreihen 9. 68. 71.
Fenolio, J. 16. 76.
Fouriersche Reihen für $\sqrt{x}$ 77.
— $1:\sqrt{x}$ 76.
— ci (αx) 75.
— $(\cos(\alpha x)-1):x$ 76.
— $\cos(\alpha x):\sqrt{x}$ 77.
— $\log x$ 78.
— $\log\Gamma(x+1)$ 79.
— si (αx) 75. 76.
— $\sin(\alpha x):x$ 76.
— $\sin(\alpha x):\sqrt{x}$ 77.
— $C(\sqrt{\alpha x})$ 75.
— $S(\sqrt{\alpha x})$ 75.
— $\Psi(x+1)$ 80.
Fresnel, A. 8. 92.
Fresnelsche Integrale s. $C(x)$ u. $S(x)$.
Funktion:
ci (x) (Definition) 6.
li (e^{-x}) u. $\mathrm{li}_1(e^x)$ (Def.) 2.
li (x) u. $\mathrm{li}_1(x)$ (Def.) 3.
si (x) (Definition) 3.
$C(x)$ (Definition) 7.
$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ 31. 40. 48.
$J^\nu(x)$ 59. 60. 61. 62. 63. 66. 71. 73. 74. 75.
$L(x)$ (Definition) 7.
$P(x, \nu)$ 1. 2. 4. 5. 6. 8. 9. 55. 58. 59. 63. 83. 84. 85.
$Q(x, \nu)$ 1. 2. 4. 5. 7. 17. 19. 20. 21. 25. 26. 30. 31. 35. 36. 37. 42. 44. 46. 47. 48. 54. 55. 57. 58. 59. 60. 62. 63. 71. 84.
$S(x)$ (Definition) 7.
$Y^\nu(x)$ 63. 64.
$\beta(x)$ 32. 33. 58.
$\zeta(x)$ 93. 94.
$\zeta(\nu, x, \alpha)$ 69.
$\psi_n(x)$ 86. 87.
$\varrho(x)$ 28. 29. 30.
$\Psi(x)$ 16. 33. 55. 68. 69. 70. 79. 80.
$\Pi^{a,b}(x)$ 62. 63.
$\Omega^n(x)$ 74. 75.

Gauß, C. F. 40. 88. 93.
Genocchi, A. 94.
Glaisher, J. L. W. 89. 90. 91.

Goldschmidt 93.
Gram, J. P. 90. 94.

Hermite, C. 67. 71.
Hölder, O. 83.
Holmgreen, E. 93.
Hypergeometrische Funktion s. $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$.

Integraldarstellung von ci (x) 11. 18.
— li (e^{-x}) 11. 18. 19. 20. 24. 25. 27.
— li $(e^{-x}) : x$ 32.
— $(\mathrm{li}\,(e^{-x}))^2$ 32.
— si (x) 11. 13. 18.
— $C(x)$ 12. 13. 18. 28.
— $L(x)$ 12. 13. 18. 19. 27. 28.
— $(L(x))^2$ 33.
— $Q(\alpha x,\nu)\cdot Q(\beta x,\varrho)$ 31.
— $S(x)$ 12. 13. 18. 28.
— $\varrho(x)$ 28. 29. 30.
Integralkosinus s. ci.
Integrallogarithmus s. li.
Integralsinus s. si.

Jacobi, C. G. J. 43. 74.

Kämpfe, B. 91.
Kettenbrüche 41 ff.
Knochenhauer, K. W. 10.
v. Koch, H. 93.
Kramp 8. 90. 91.
Krampsche Transzendente s. $L(x)$.
Kronecker, L. 24.
Kugelfunktionen 71.
Kummer, E. E. 79.

Lacroix, S. F. 8.
Laguerre, E. 44. 46.
Landau, E. 93.
Laplace, P. S. 8. 24. 43.
Legendre, A. M. 9. 42.
Lerch, M. 80.
Lindstedt, A. 92.
v. Lommel, E. 10.
Lommelsche Funktion s. $\Pi^{a,b}(x)$.

Markoff, A. A. 91.
Mascheroni, L. 3. 5. 8. 36.
Mellin, H. 71.
Mellinsche Integralformel 19. 25. 36. 42. 84.
Meyer, A. 91.
de Morgan 88.

Neumannsche Reihen 71.

Oppermann, L. 90.

Petersen, J. 93.
Phragmèn, E. 93.

Raabe, J. L. 24. 28. 29. 30.
Reihenentwicklungen für ci (x) 7. 10. 72.
— li (e^{-x}) 2. 9. 72. 84. 85. 86. 87.
— si (x) 7. 10. 72. 73. 74. 75.
— $C(x)$ 8. 10.
— $L(x)$ 7. 10. 85.
— $S(x)$ 8. 10.
Riemann, B. 93. 94.

Scheibner, W. 92.
Schendel, L. 10.
Schlömilch, O. 8. 16. 24. 25. 27. 28. 48. 49. 56. 59. 71. 75. 76. 81.
Soldner, J. 42. 43. 45. 64. 65. 84. 87. 88. 89.
v. Sonin, N. 65. 66.
Stenberg 90.
Stieltjes, T. J. 24.
Stirlingsche Polynome s. $\psi_n(x)$.
— Zahlen 86.

Tannery, J. 46.

Unbestimmtes Integral von ci (x) 11.
— ci $(\alpha x)\cdot$ ci (βx) 53.
— ci $(\alpha x)\cdot$ si (βx) 54.
— li (e^{-x}) 11.
— li $(e^{-\alpha x})\cdot$ li $(e^{-\beta x})$ 53.
— si (x) 11.
— si $(\alpha x)\cdot$ si (βx) 54.
— $C(x)$ 12.
— $L(x)$ 12.
— $S(x)$ 12.

de la Vallée-Poussin, Ch. 93.

Wallis, J. 39.
Winckler, A. 32. 33.

Zylinderfunktionen s. $J^\nu(x)$ u. $Y^\nu(x)$.

STANFORD UNIVERSITY LIBRARY

To avoid fine, this book should be returned on or before the date last stamped below.

JAN 5 '56
JUN 8 '56
AUG 20 1965
APR 16 1968
JUN 15 1981
FEB 20 1993
MAR 05 1999

Stanford University Libraries
3 6105 002 041 726

QA
312
N5

289441